# Advanced Topics in the Calculus of Variations

## Aufgabe 22

(a) $\mu \in P^{rc}(K)$, z.z. $\overline{\mu} \in K^{rc}$

<u>Bew</u> Sei $f \in \mathbb{R}^{m \times d} \to \mathbb{R}$ rang-1-konvex derart dass $f|_K \leq 0$ z.z. $f(\overline{\mu}) \leq 0$.

Da $\mu \in P^{rc}(K)$ gilt

$$f(\overline{\mu}) \leq \langle \mu, f \rangle = \int \underbrace{f(x)}_{\leq 0 \text{ auf } K} \underbrace{d\mu(x)}_{\text{hat Träger in } K} = \int_K f(x)\,d\mu(x) \leq 0.$$

$\Longrightarrow$ Beh.

(b) <u>Nein</u>! $I$ Einheitsmatrix, $\mu_n := \delta_{nI}$ ist ein Laminat. <u>Aber</u> $\mu_n \xrightarrow{*} 0$, weswegen die Menge der Laminate nicht schwach$*$-abgeschlossen ist, da $0$ kein Wahrscheinlichkeitsmaß und damit auch kein Laminat ist.

(c) <u>Ja!</u> Sei $(\mu_n) \subset P^{rc}(K)$ mit $\mu_n \xrightarrow{*} \mu$

z.z. $\mu \in P^{rc}(K)$. Beachte

1) $\operatorname{supp} \mu \subset K$ denn sei $f \in C_0(K^c)$. Dann gilt

$$\int f\,d\mu = \lim_{n \to \infty} \int f\,d\mu_n = 0.$$

$$\Rightarrow |\mu|(K^c) = \sup_{\substack{f \in C_0(K^c) \\ \|f\|_\infty \leq 1}} \int f\,d\mu = 0.$$

2) Damit gilt $\forall f \in C(\mathbb{R}^{m \times d})$

$$\langle \mu, f \rangle = \lim_{n \to \infty} \langle \mu_n, f \rangle$$

denn wähle $\chi \in C_c(\mathbb{R}^{m \times d}) : \chi = 1$ auf $K$

Dann $\langle \mu, f \rangle = \langle \mu, f\chi \rangle$

$$\overset{\text{Def schw}}{\underset{\text{konvergent}}{=\!=}} \lim_{n\to\infty} \langle \mu_n, f\chi \rangle = \langle \mu, f\chi \rangle = \langle \mu, f \rangle.$$

Nun z.z. $\forall f$ Rang 1-konvex $f(\bar{\mu}) \leq \langle \mu, f \rangle$

Beachte $\bar{\mu} = \lim_{n\to\infty} \bar{\mu}_n$

da $\bar{\mu} = \langle Id, \mu \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle Id, \mu_n \rangle = \lim_{n\to\infty} \bar{\mu}_n$

Nun $f$ Rang-1-konvex $\Rightarrow$ $f$ stetig und daher

$$f(\bar{\mu}) = \lim_{n\to\infty} f(\bar{\mu}_n) \underset{\mu_n \in \mathcal{M}^{pc}}{\leq} \liminf_{n\to\infty} \langle \mu_n, f \rangle = \langle \mu, f \rangle.$$

A22(d) Siehe A18e

A23 (a) $f, g$ Rang-1-konvex, z.z. $\max(f, g)$ Rang 1-konvex.

Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times d}$, $B \in \mathbb{R}^{m \times d} : rk(B) = 1$

z.z. $t \mapsto \max(f,g)(A+tB)$ konvex. Sei $t \in \mathbb{R}$

$$\max(f,g)(A+tB) = \max\Big(\underbrace{f(A+tB)}_{\text{konvex}}, \underbrace{g(A+tB)}_{\text{konvex}}\Big)$$

ist als Maximum konvexer Funktionen wieder konvex

1b) Ja! Sei $B \in \mathbb{R}^{m \times d}$ mit $\operatorname{rk} B = 1$

OBdA $B = (e_1 \otimes e_1)$, sonst Basiswechsel

(der det nur ~~um~~ konstante Faktoren verändert

$$\det(A+tB)^2 = \det\begin{pmatrix} a_{11}+ta_{12} & - & a_{1d} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \dots & a_{md} \end{pmatrix}^2$$

$$= \left(\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & - - & a_{1d} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & \cdot & \text{---} & a_{md} \end{pmatrix} + t \underbrace{\det\begin{pmatrix} 1 & a_{12} & \cdots & a_{1d} \\ 0 & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & a_{m1} & & \text{-}a_{md} \end{pmatrix}}_{= \det \tilde{A}}\right)^2$$

$$= (\det A + t \det \tilde{A})^2 = t^2 (\det \tilde{A})^2 + 2t \det A \det \tilde{A}$$

$$+ (\det A)^2$$

$$\Longrightarrow \frac{d^2}{dt^2} \det(A+tB)^2 = 2(\det \tilde{A})^2 \geq 0$$

$\Longrightarrow t \mapsto \det(A+tB)^2$ konvex

$\Longrightarrow A \mapsto (\det A)^2$ rang-1-konvex.

(c) $K = O_2(\mathbb{R})$ z.z. $0 \in K^{rc}$

Beh

$$\nu := \frac{1}{4}\overbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}^{:= A_1} + \frac{1}{4}\overbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}^{:= A_2} + \frac{1}{4}\overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}^{:= A_3} + \frac{1}{4}\overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}^{:= A_4}$$

ist ein Laminat. Dann gilt mit A22(a)

$K^{rc} \ni \overline{\nu} = 0$. Damit wäre die Behauptung gezeigt.

Bew

Wir zeigen dass $\mu$ ein Laminat endlicher Ordnung ist.

1) Kontrahiere $A_1, A_2$, dies sind Rang 1- verbundene Matrizen.

$$\text{z.z.}\quad \tilde{\mu} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

ist ein Laminat

2) Kontrahiere $A_3, A_4$, dies sind Rang-1- verbundene Matrizen

$$\text{z.z.}\quad \tilde{\mu} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

ist ein Laminat

Dies gilt aber tatsächlich ✓

$\Longrightarrow$ $\mu$ Laminat endlicher Ordnung

$$\text{z.z.}\quad |\det A| \leq 1 \quad \forall A \in K^{rc}$$

Bew $A \mapsto (\det A)^2 - 1$ ist rang-1-konvex und

$\det(A)^2 - 1 \leq 0$ auf $O_2(\mathbb{R}) = K$

da $A \in O_2(\mathbb{R}) \Longrightarrow I = A^T A$

$\Longrightarrow 1 = \det I = \det(A^T A) = (\det A)^2$

$\Longrightarrow$ Beh.

Def $K^{rc}$

$\Longrightarrow \det(A)^2 - 1 \leq 0$ auf $K^{rc}$ $\Longrightarrow$ Beh

A24

(a) Sei $f: \mathbb{R}^{m\times d} \to \mathbb{R}$ rang 1 - konvex.

Dann ist $\tilde{f}: \mathbb{R}^{md} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\tilde{f}(x_1, \text{———} x_{md}) := f\left(\left(\begin{matrix} x_1 & x_{m+1} & \cdots & x_{(d-1)m+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_m & x_{2m} & & x_{dm} \end{matrix}\right)\right)$$

Komponentenkonvex, denn

$$t \mapsto \tilde{f}(x_1, \text{——} x_{jd+r} + t, \text{———} x_{md})$$

$$= f(X + t(e_j \otimes e_r)) \quad \text{konvex.}$$

(b) Induktion nach $M$

$M = 1$ ✓ (Komponentenkonvex $\Rightarrow$ konvex $\Rightarrow$ lokal Lipschitz) (siehe Hinweis)

$M \to M+1$

Sei $R > 0$. Wir zeigen $f: \mathbb{R}^{M+1} \to \mathbb{R}$ komponenten-konvex ist auf $[-R, R]^{M+1}$ lokal Lipschitz

Seien nun $x = (x_1, \text{——} x_{M+1})$, $y = (y_1, \text{——} y_{M+1})$

beide in $[-R, R]^{M+1}$

Für ein $f: \mathbb{R}^\ell \to \mathbb{R}$ komponentenkonvex setze

$$f^i_{x_1, \ldots, \hat{x}_i, \ldots x_\ell}(t) := f(x_1, \text{——} x_{i-1}, t, x_{i+1}, \text{——} x_\ell)$$

für $i = 1, \text{——} \ell$.

Beachte: alle $f^i$ sind konvex

$$|f(x_1, \ldots, x_{M+1}) - f(y_1, \ldots, y_{M+1})|$$

$$\leq | f(x_1, \ldots, x_{M+1}) - f(x_1, \ldots x_M, y_{M+1}) |$$

$$+ | f(x_1, \ldots x_M, y_{M+1}) - f(y_1, \ldots y_M, y_{M+1}) |$$

$$= | f^{M+1}_{x_1, \ldots x_M}(x_{M+1}) - f^{M+1}_{x_1, \ldots x_M}(y_{M+1}) |$$

$$+ | f(x_1, \ldots x_{M-1}, x_M, y_{M+1}) - f(x_1, \ldots x_{M-1}, y_M, y_{M+1}) |$$

$$+ | f(x_1, \ldots x_{M-1}, y_M, y_{M+1}) - f(y_1, \ldots y_M, y_{M+1}) |$$

$$\leq | f^{M+1}_{x_1, \ldots x_M}(x_{M+1}) - f^{M+1}_{x_1, \ldots x_M}(y_{M+1}) |$$

$$+ | f^{M}_{x_1, \ldots, \hat{x}_M, y_{M+1}}(x_M) - f^{M}_{x_1, \ldots \hat{x}_M, y_{M+1}}(y_M) |$$

$$+ \left| \sum_{j=1}^{M-1} f^{j}_{x_1, \ldots \hat{x}_j, y_{j+1}, \ldots y_{M+1}}(x_j) - f^{j}_{x_1, \ldots \hat{x}_j, y_{j+1}, \ldots y_{M+1}}(y_j) \right|$$

$$\leq \sum_{j=1}^{M+1} | f^{j}_{x_1, \ldots \hat{x}_j, y_{j+1}, \ldots y_{M+1}}(x_j) - f^{j}_{x_1, \ldots \hat{x}_j, y_{j+1}, \ldots y_{M+1}}(y_j) |$$

$$\underset{\substack{\text{Hinweis}\\ a=-R,\, b=R}}{\overset{\hat f^{j}_{\dots} \text{ konvex}}{\leq}} \sum_{j=1}^{m+1} \frac{\left|\hat f^{j}_{x_1,\dots,\hat x_j,y_{j+1},\dots,y_{m+1}}(-R) - \hat f^{j}_{x_1,\dots,\hat x_j,y_{j+1},\dots,y_{m+1}}(R)\right|}{2R} \underbrace{|x_j - y_j|}_{\leq |x-y|} \qquad (*)$$

Nun gilt für $j \in \{1, \dots, m+1\}$ und alle $x, y \in [-R,R]^{m+1}$ dass

$$\hat f^{j}_{x_1,\dots,\hat x_j,y_{j+1},\dots,y_{m+1}}(-R)$$

$$= f(x_1, \dots, x_{j-1}, -R, y_{j+1}, \dots, y_{m+1})$$

$$\leq \sup_{z\in[-R,R]^m} \underbrace{f(z_1, \dots, z_{j-1}, -R, z_j, \dots, z_m)}_{=: (f \sim j)(z_1,\dots,z_m)}$$

Nun $(f \sim j)$ ist komponentenkonvex von $\mathbb{R}^m$ nach $\mathbb{R}$

$$\Rightarrow \underbrace{\sup_{z\in[-R,R]^m} f(z_1, \dots, z_{j-1}, -R, z_j, \dots, z_m)}_{=: S_j} < \infty$$

$$\overset{(*)}{\Longrightarrow} |f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{2R} \sum_{j=1}^{m+1} (2 S_j) \; |x-y|$$

$$\leq L\, |x-y|$$

(c) Sei $f: \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f\left(\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}\right) = a_1 a_3 - a_2 a_4$$

$\to$ Komponentenkonvex da linear in jeder Komponente, aber

$$f\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = -t^2$$

nicht konvex!

$\boxed{A27}$ Versuch mit "normaler" Hahn-Banach-Version:

(a) $A \subset X^*$ konvex und schwach-*-abgeschlossen, $g \notin A$

$\Rightarrow A \subset X^*$ konvex & abgeschlossen, $g \notin A$.

$\xRightarrow[\text{Version}]{\text{übliche}} \exists x'' \in X^{**} : \quad x''(g) < \inf_{f \in A} x''(f).$

Ist $X$ nun reflexiv so wäre $x''(g) = i_X(x)(g) = g(x)$

und dann wäre die Beh. gezeigt.

Leider ist $X$ nicht als reflexiv vorausgesetzt.

Bei uns in der Vorlesung war $X = \mathcal{M}(\mathbb{R}^{m \times d})$

welches leider (siehe Blatt 2) nicht reflexiv ist

(b)

Thm VIII. 2. 12 (Trennungssatz von Hahn Banach)

Sei $X$ ein lokalkonvexer Raum, $V \subset X$

abgeschlossen und konvex und $x \notin V$.

Dann existiert ein stetiges lineares Funktional $x' \in X^*$

sodass

$$\operatorname{Re} x'(x) < \inf_{v \in V} \operatorname{Re} x'(v).$$

Was ist $X^*$, wenn $X$ keine Norm hat?

[Re egal da wir nur reelle Banachräume betrachten]

# Lokal Konvexer Raum

Ein Vektorraum $X$ ausgestattet mit einer Topologie $\mathcal{T}$ heißt lokalkonvexer Raum falls Addition und Skalare Multiplikation auf $X$ stetig sind

es eine Familie von Halbnormen $\mathcal{P}$ auf $X$
[Homogen, positiv semidefinit, $\Delta$-Ungleichung]

gibt sodass

$$\mathcal{B} = \left\{ U_{F,\varepsilon} := \{x \in X \mid p(x) \leq \varepsilon \ \forall p \in F\} \ \middle| \ \varepsilon > 0, F \subset \mathcal{P} \text{ endlich} \right\}$$

eine Nullumgebungsbasis bildet, d.h.

Jede offene Umgebung der Null ist Obermenge einer der Mengen in $\mathcal{B}$, [und alle Mengen aus $\mathcal{B}$ sind offen!]

Hoffnung $X$ Banachraum

$\Longrightarrow (X^*, \mathcal{T} = \text{schwach-}*\text{-Topologie})$ lokalkonvexer Raum,

denn dann wird

→ abgeschlossen in ☺ zu schwach-*-abgeschlossen YAY!

→ stetig in ☺ zu schwach-*-stetig HMMM... ?!?

Definition VIII 3.2 (Schwach-*-Topologie)

Die schwach-*-Topologie auf $X^*$ ist die (lokalkonvexe!) Topologie, die durch die Familie von Halbnormen

$$\{p_x(x') := |x'(x)| \mid x \in X\}$$

induziert wird, d.h. die kleinste Topologie $T$ sodass Addition & skalare Multiplikation stetig sind und

$$\mathcal{B} = \left\{ U_{x_1,\dots,x_m,\varepsilon} := \{x' \in X' \mid p_{x_1}(x'),\dots,p_{x_m}(x') \leq \varepsilon \ \forall i=1,\dots,m\} \;\middle|\; \begin{array}{c}\varepsilon > 0 \\ \{x_1,\dots,x_m\} \subset X \\ \text{endlich}\end{array} \right\}$$

eine Nullumgebungsbasis bildet.

Was ist jetzt mit schwach-*-Konvergenz?

Heißt schwach-*-konvergent nun konvergent in der schwach-*-Topologie?.

Die Frage muss konkretisiert werden (Grund: Netzkonvergenz)

Proposition

$\longrightarrow$ schwach-*-Konvergenz

$x_n' \xrightarrow{*} x$

$\Longrightarrow \forall U$ Umgebung der Null $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ : $x_n' - x' \in U$ $\forall n \geq n_0$

$\longrightarrow$ Folgenkonvergenz in $(X^*,$ schw. Topologie$)$

Bew Sei $U$ Umgebung der Null

$$\Longrightarrow \exists \varepsilon > 0 \quad x_1, \ldots x_m \in X : \quad U_{x_1, \ldots, x_m, \varepsilon} \subset U$$

Wir zeigen $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : x_n' - x' \in U_{x_1, \ldots x_m, \varepsilon}$

Bew z.z. $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0$

$$p_{x_1}(x_n' - x'), \ldots \quad p_{x_m}(x_n' - x') < \varepsilon$$

d.h. $|x_n'(x_1) - x'(x_1)|, \ldots, |x_n'(x_m) - x'(x_m)| < \varepsilon$

Da nun $x_n'(x_1) \xrightarrow{n \to \infty} x'(x_1), \ldots \quad x_n'(x_m) \xrightarrow{n \to \infty} x'(x_m)$
folgt die Beh.

Wähle $n_0$ so groß dass $|x_n'(x_i) - x'(x_i)| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$
$\forall i = 1, \ldots m.$

Im "Werner- Funktionalanalysis" wird die schwach-$*$-Topologie mit $\sigma(X^*, X)$ bezeichnet.

Nun 2!2

Korollar VIII.3.4. Ein lineares Funktional auf $X^*$ ist genau dann $\sigma(X^*, X)$-stetig wenn es von der Form

$$x' \longmapsto x'(x) \quad \text{ist}$$

Es gilt also: $\left(X^*, \text{schwach-}*\text{-Topologie}\right)^* = X$.

Nun Beweis des Trennungssatzes "Theorem"

$V \subset X^*$ schwach-$*$-abgeschlossen und konvex, $g \notin V$

$\Longrightarrow \exists$ schwach-$*$-stetiges lineares Funktional $i$

~~soda~~ sodass

$$i(g) < \inf_{f \in V} i(f)$$

$\Longrightarrow$ da $i(g) = g(x)$ für ein $x \in X$ gilt

$$g(x) < \inf_{f \in V} f(x).$$ qed.