Advanced Topics in the Calculus of Variations

A47(a) Es sei $x \in [0, \frac{1}{3}]$, $y \in [\frac{2}{3}, 1]$.

Dann gibt es $\xi \in [0,1]$: $|f'(\xi)| = \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|}$

Nun $|f'(\xi)| = \frac{1}{|x-y|} |f(x)-f(y)| \leq 3(|f(x)|+|f(y)|)$

$$\begin{aligned} |f'(0)| &\leq |f'(0) - f'(\xi)| + |f'(\xi)| \\ &= \left|\int_0^\xi f''(s)\, ds\right| + 3(|f(x)| + |f(y)|) \\ &\leq \int_0^1 |f''(s)|\, ds + 3(|f(x)| + |f(y)|) \end{aligned}$$

Integrere nun über $x \in [0, \frac{1}{3}]$, $y \in [\frac{2}{3}, 1]$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{1}{9} |f'(0)| &\leq \frac{1}{9} \int_0^1 |f''(s)|\, ds \\ &\quad + 3\left(\frac{1}{3} \int_0^{\frac{1}{3}} |f(x)|\, dx + \frac{1}{3} \int_{\frac{2}{3}}^1 |f(y)|\, dy\right) \\ &\leq \frac{1}{9} \int_0^1 |f''(s)|\, ds + \int_0^1 |f(z)|\, dz \end{aligned}$$

$$\Rightarrow |f'(0)| \leq 9 \left(\int_0^1 |f''(s)|\, ds + \int_0^1 |f(z)|\, dz \right)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow |f'(0)|^p &\leq 9^p \left(\int_0^1 |f''(s)|\, ds + \int_0^1 |f(s)|\, ds \right)^p \\ &\leq 18^p \left[\left(\int_0^1 |f''(s)|\, ds\right)^p + \left(\int_0^1 |f(s)|\, ds\right)^p \right] \end{aligned}$$

zusam.

$$\leq 18^p \left(\int_0^1 |f''(s)|^p ds + \int_0^1 |f(s)|^p ds \right)$$

$\Longrightarrow$ Beh.

(b) Sei $g \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\varepsilon > 0$, $x \in \mathbb{R}$.

Wähle $f(y) := g(x + \varepsilon y) \qquad y \in [0,1]$.

Dann $f \in C^\infty([0,1])$

$$\overset{4a)}{\Longrightarrow} \quad |f'(0)|^p \leq C(p) \left(\int_0^1 |f''(s)|^p ds + \int_0^1 |f(s)|^p ds \right.$$

Nun

$$f'(0) = \varepsilon g'(x)$$

$$f''(y) = \varepsilon^2 g''(x + \varepsilon y)$$

$$f(y) = g(x + \varepsilon y)$$

$$\Longrightarrow \varepsilon^p |g'(x)|^p \leq C(p) \left(\varepsilon^{2p} \int_0^1 |g''(x + \varepsilon y)|^p dy + \int_0^1 |g(x + \varepsilon y)|^p dy \right)$$

$$= C(p) \left(\varepsilon^{2p-1} \int_x^{x+\varepsilon} |g''(z)|^p dz + \frac{1}{\varepsilon} \int_x^{x+\varepsilon} |g(z)|^p dz \right)$$

$$\Longrightarrow \quad |g'(x)|^p \leq C(p) \left(\varepsilon^{p-1} \int_x^{x+\varepsilon} |g''(z)|^p dz + \frac{1}{\varepsilon^{p+1}} \int_x^{x+\varepsilon} |g(z)|^p dz \right)$$

$$= \frac{C(p)}{\varepsilon} \left(\varepsilon^p \int_x^{x+\varepsilon} |g''(z)|^p dz + \frac{1}{\varepsilon^p} \int_x^{x+\varepsilon} |g(z)|^p dz \right)$$

A47c)

$$\xRightarrow{\text{A47b)}} \int_{\mathbb{R}} |g'(x)|^p \, dx \leq \frac{C(p)}{\varepsilon} \Big(\varepsilon^p \int_{\mathbb{R}} \int_x^{x+\varepsilon} |g''(z)|^p \, dz \, dx$$

$$+ \frac{1}{\varepsilon^p} \int_{\mathbb{R}} \int_x^{x+\varepsilon} |g(z)|^p \, dz \, dx \Big)$$

$\{-\infty \leq x \leq z \leq x+\varepsilon \leq \infty\}$

$0 \leq z - x \leq \varepsilon$
$\Rightarrow 0 \geq x - z \geq -\varepsilon$
$\Rightarrow z \geq x \geq z - \varepsilon$

$$\leq \frac{C(p)}{\varepsilon} \Big(\varepsilon^p \int_{\mathbb{R}} \underbrace{\int_{z-\varepsilon}^{z} |g''(z)|^p \, dx}_{= \varepsilon |g''(z)|^p} \, dz$$

$$+ \frac{1}{\varepsilon^p} \int_{\mathbb{R}} \underbrace{\int_{z-\varepsilon}^{z} |g(z)|^p \, dx}_{= \varepsilon |g''(z)|^p} \, dz \Big)$$

$$= \frac{C(p)}{\varepsilon} \Big(\varepsilon^{p+1} \int_{\mathbb{R}} |g''(z)|^p \, dz + \varepsilon^{1-p} \int_{\mathbb{R}} |g(z)|^p \, dz \Big)$$

$$= C(p) \Big(\varepsilon^p \int_{\mathbb{R}} |g''(z)|^p \, dz + \varepsilon^{-p} \int_{\mathbb{R}} |g(z)|^p \, dz \Big)$$

$$\Rightarrow \Big(\int_{\mathbb{R}} |g'(x)|^p \, dx \Big)^{\frac{1}{p}} \leq C(p)^{\frac{1}{p}} \Big(\varepsilon^p \int |g''(z)|^p dz + \varepsilon^{-p} \int_{\mathbb{R}} |g(z)|^p dz \Big)^{\frac{1}{p}}$$

$$\underset{(\mathbb{R}^2, |\cdot|_p)}{\overset{\text{Äquiv.}}{\leq}} \tilde{C}(p) \Big(\varepsilon \Big(\int |g''(z)|^p dz \Big)^{\frac{1}{p}} + \frac{1}{\varepsilon} \Big(\int_{\mathbb{R}} |g(z)|^p dz \Big)^{\frac{1}{p}} \Big)$$

$$\Rightarrow \|g'\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq \tilde{C}(p) \left(\varepsilon \|g''\|_{L^p(\mathbb{R})} + \varepsilon^{-1} \|g\|_{L^p(\mathbb{R})} \right)$$

A47d)

$$(\mathrm{I})\quad \|g''\|_{L^p(\mathbb{R})} \overset{A47c)}{\leq} C(p)\left(\varepsilon\|g'''\|_{L^p(\mathbb{R})} + \varepsilon^{-1}\|g'\|_{L^p(\mathbb{R})}\right)$$

$$\overset{\substack{\text{beliebiges}\\ \tilde{\varepsilon}>0}}{\leq} C(p)\left(\varepsilon\|g'''\|_{L^p(\mathbb{R})} + \frac{1}{\varepsilon}\left(C(p)\tilde{\varepsilon}\|g''\|_{L^p(\mathbb{R})} + C(p)\tilde{\varepsilon}^{-1}\|g\|_{L^p(\mathbb{R})}\right)\right)$$

$$\leq C(p)\varepsilon\|g'''\|_{L^p(\mathbb{R})} + \frac{\tilde{\varepsilon}}{\varepsilon}C(p)^2\|g''\|_{L^p(\mathbb{R})}$$

$$+ C(p)^2\tilde{\varepsilon}^{-1}\varepsilon^{-1}\|g\|_{L^p(\mathbb{R})}$$

$$\leq C(p)\varepsilon\|g'''\|_{L^p(\mathbb{R})} + \frac{1}{2}\|g''\|_{L^p(\mathbb{R})}$$

Wähle $\tilde{\varepsilon} = \frac{1}{2C(p)^2}\varepsilon$ $\qquad + 2C(p)^4\frac{1}{\varepsilon^2}\|g\|_{L^p(\mathbb{R})}$

$$\Longrightarrow \frac{1}{2}\|g''\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq C(p)\varepsilon\|g'''\|_{L^p(\mathbb{R})} + \frac{2C(p)^4}{\varepsilon^2}\|g\|_{L^p(\mathbb{R})}$$

$$\Longrightarrow \|g''\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq \max\{2C(p), 4C(p)^4\}\left(\varepsilon\|g'''\|_{L^p(\mathbb{R})} + \frac{1}{\varepsilon^2}\|g\|_{L^p(\mathbb{R})}\right)$$

$$=: \tilde{C}(p)\left(\varepsilon\|g'''\|_{L^p(\mathbb{R})} + \varepsilon^{-2}\|g\|_{L^p(\mathbb{R})}\right).$$

~~A4~~. Sei $\varepsilon>0$

$$(\mathrm{II}) - \|g'\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq C(p)\left(\varepsilon^{\frac{1}{2}}\|g''\|_{L^p(\mathbb{R})} + \varepsilon^{-\frac{1}{2}}\|g\|_{L^p(\mathbb{R})}\right)$$

$$\overset{\substack{\tilde{\varepsilon}>0\\ \text{bel.}}}{\leq} C(p)\left(\varepsilon^{\frac{1}{2}}C(p)\left(\tilde{\varepsilon}\|g'''\|_{L^p(\mathbb{R})} + \tilde{\varepsilon}^{-1}\|g'\|_{L^p(\mathbb{R})}\right) + \varepsilon^{-\frac{1}{2}}\|g\|_{L^p(\mathbb{R})}\right)$$

$$\leq \varepsilon^{\frac{1}{2}} \tilde{\varepsilon}\, C(p)^2 \|g'''\|_{L^p(\mathbb{R})} + C(p)^2 \varepsilon^{\frac{1}{2}} \tilde{\varepsilon}^{-1} \|g'\|_{L^p(\mathbb{R})}$$

$$+ C(p) \varepsilon^{-1/2} \|g\|_{L^p(\mathbb{R})}$$

Nun wähle $\tilde{\varepsilon} = \cancel{\frac{2}{C(p)^2 \varepsilon^{1/2}}}\; 2 \varepsilon^{\frac{1}{2}} C(p)^2$

Dann gilt

$$\|g'\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq 2 C(p)^4 \varepsilon \|g'''\|_{L^p(\mathbb{R})} + \frac{1}{2} \|g'\|_{L^p(\mathbb{R})}$$

$$+ C(p) \varepsilon^{-1/2} \|g\|_{L^p(\mathbb{R})}$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{2} \|g'\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq 2 C(p)^4 \varepsilon \|g'''\|_{L^p(\mathbb{R})} + C(p) \varepsilon^{-\frac{1}{2}} \|g\|_{L^p(\mathbb{R})}$$

$$\leq \max\left(2C(p)^4, C(p)\right) \left(\varepsilon \|g'''\|_{L^p(\mathbb{R})} + \varepsilon^{-\frac{1}{2}} \|g\|_{L^p(\mathbb{R})}\right)$$

$$\Longrightarrow \|g'\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq \tilde{\tilde{C}}(p) \left(\varepsilon \|g'''\|_{L^p(\mathbb{R})} + \varepsilon^{-\frac{1}{2}} \|g\|_{L^p(\mathbb{R})}\right).$$

A47(e)

z TFAE

(1) $\forall \varepsilon > 0 : \|g'\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq C(p)\left(\varepsilon \|g''\|_{L^p(\mathbb{R})} + \varepsilon^{-1} \|g\|_{L^p(\mathbb{R})}\right)$

(2) $\|g'\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq C(p) \|g''\|_{L^p(\mathbb{R})}^{\frac{1}{2}} \|g\|_{L^p(\mathbb{R})}^{\frac{1}{2}}$

Bew

(1) $\Rightarrow$ (2) $\quad \varepsilon := \frac{\|g\|_p^{\frac{1}{2}}}{\|g''\|_p^{\frac{1}{2}}}$ falls $\|g''\|_p \neq 0$, $\|g\|_p \neq 0$ ergibt

$$\|g'\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq C(p)\left(\varepsilon \|g''\|_p + \varepsilon^{-1} \|g\|_p\right)$$
$$= C(p)\left(\|g''\|_p^{\frac{1}{2}} \|g\|_p^{\frac{1}{2}} + \|g''\|_p^{\frac{1}{2}} \|g\|_p^{\frac{1}{2}}\right)$$
$$= 2C(p) \|g''\|_p^{\frac{1}{2}} \|g\|_p^{\frac{1}{2}}$$

Falls $\|g''\|_{L^p} = 0$ so gilt $g'' = 0$ für

$\Rightarrow g(x) = Cx + D$ für $C, D \in \mathbb{R}$,

Entweder $C = D = 0$ und die Ungleichung stimmt trivialerweise oder $\neg(C = D = 0)$ und die Ungleichung stimmt auch weil auf beiden Seiten ∞ steht.

$$\Longrightarrow \quad \|g'\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq 2C(p) \|g''\|_{L^p(\mathbb{R})}^{\frac{1}{2}} \|g\|_{L^p(\mathbb{R})}^{\frac{1}{2}}$$

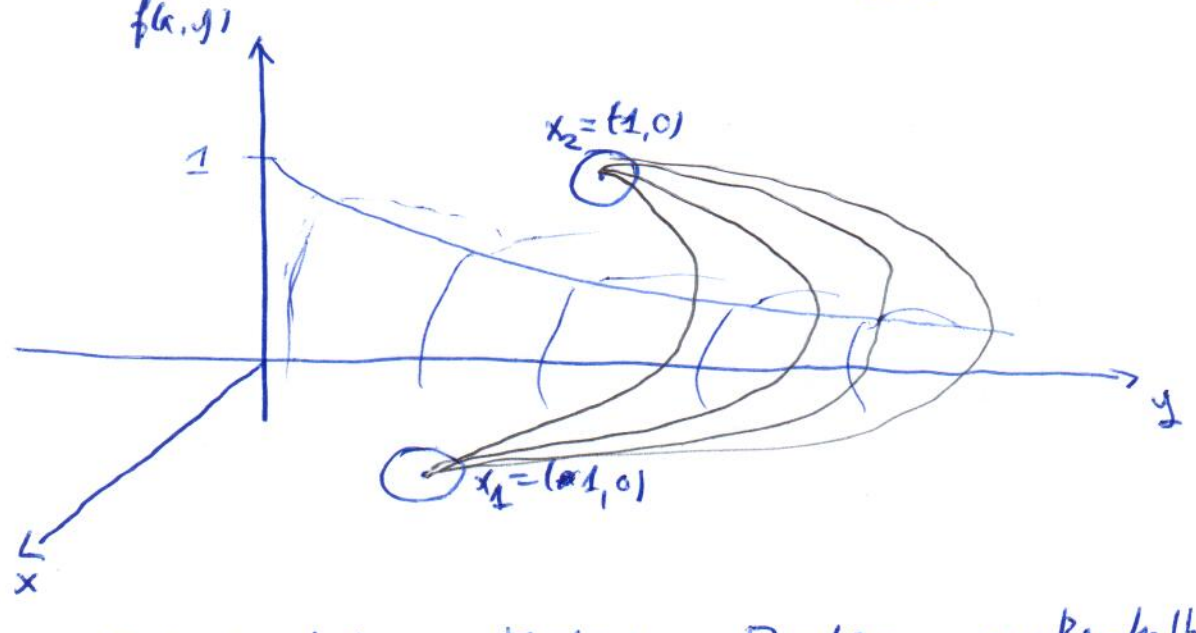
(2) $\Rightarrow$ (1)

$$\|g'\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq C(p) \|g''\|_{L^p(\mathbb{R})}^{\frac{1}{2}} \|g\|_{L^p(\mathbb{R})}^{\frac{1}{2}}$$
$$\leq C(p)\left(\sqrt{\varepsilon} \|g''\|_{L^p(\mathbb{R})}^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \|g\|_{L^p(\mathbb{R})}^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$\leq 2C(p)\left(\varepsilon \|g''\|_{L^p(\mathbb{R})} + \frac{1}{\varepsilon}\|g\|_{L^p(\mathbb{R})}\right) \text{ qed}$$

Aufgabe 48 Wähle $\delta < \frac{1}{4}$, $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch

(a) $f(x,y) := \begin{cases} e^{-y} - x^2 & (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus (B_\delta((-1,0)) \cup B_\delta((1,0))) \\ \text{so, dass } f \text{ } C^1 \text{ ist aber auch eine isolierte lokales Minimum bei } (-1,0) \text{ und } (1,0) \text{ hat und echt negativ auf } B_\delta(-1,0) \cup B_\delta(-1,0) \text{ ist.} & (x,y) \in B_\delta((-1,0)) \cup B_\delta((1,0)) \end{cases}$



Beachte: f hat keine kritischen Punkte außerhalb von $B_\delta((-1,0)) \cup B_\delta((1,0)) \Rightarrow$ Jedes kritische Niveau ist negativ!

Nun: f nicht koerziv ✓

Würde das Mountain-Pass Lemma gelten so ergäbe es einen kritischen Punkt zu dem Niveau

$$\beta := \inf_{P \in \mathcal{P}} \sup_{x \in P} \mathcal{E}(x) \quad \text{wobei}$$

$$\mathcal{P} := \{P \subset \mathbb{R}^n \text{ kompakt zshgd}, x_1, x_2 \in P\}$$

Nun gilt wegen dem ZWS.

$$\forall P \in \mathcal{P} \ \exists \underset{= (x_p^1, x_p^2)}{x_p \in P} : \quad x_p^1 = 0.$$

Damit hat man

$$\sup_{x \in P} \mathcal{E}(x) \geq \mathcal{E}(x_p) = e^{-x_p^2} > 0.$$

$$\Longrightarrow \beta = \inf_{P \in \mathcal{P}} \sup_{x \in P} \mathcal{E}(x) \geq 0$$

$\Longrightarrow$ ↯ zu (-☀-)

<u>A48b)</u> $\alpha \in (\max(\mathcal{E}(x_1), \mathcal{E}(x_2)), \beta)$ $(*)$

Angenommen $E_\alpha := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \mathcal{E}(x) \leq \alpha\}$

zusammenhängend.

<u>Beh</u> $E_\alpha \in \mathcal{P} := \{P \subset \mathbb{R}^n \text{ Kompakt zshgd}, x_1, x_2 \in P\}$

<u>Bew</u> <u>zsgd</u> laut Voraussetzung ✓

<u>Kompakt</u>: $E_\alpha = \mathcal{E}^{-1}((-\infty, \alpha])$ abgeschlossen als Urbild einer abgeschlossenen Menge unter einer stetigen Fkt.

Beschränkt da $\mathcal{E}$ Koerziv $\Longrightarrow$ Kompaktheit

<u>$x_1, x_2 \in E_\alpha$</u> da $\mathcal{E}(x_1) \leq \alpha$ und

$\mathcal{E}(x_2) \leq \alpha$ wegen $(*)$

$$\Longrightarrow E_\alpha \in \mathcal{P}$$

$$\Longrightarrow \beta = \inf_{P \in \mathcal{P}} \sup_{x \in P} \mathcal{E}(x) \leq \sup_{x \in E_\alpha} \mathcal{E}(x) = \alpha \quad ↯$$

Aufgabe 49

$\mathcal{E} \in C^{1,1}_{loc}(H, \mathbb{R})$, Palais-Smale-Bedingung

(1) $\mathcal{E}(0) = 0$

(2) $\exists \alpha > 0 \; \exists \rho > 0$ sodass $\left(\|u\|_H \geq \rho \Longrightarrow \mathcal{E}(u) \geq \alpha \right)$

Z $\mathcal{E}$ hat lokales Minimum in $B_\rho(0)$

Wir zeigen sogar: $\mathcal{E}$ hat globales Minimum in $B_\rho(0)$.

Bew $\beta := \inf \{ \mathcal{E}(y) \mid y \in B_\rho(0) \}$.

Beachte: Wegen (1) gilt $\beta \leq 0$. Daher gilt wegen (2) auch

$$\beta = \inf \{ \mathcal{E}(y) \mid y \in H \}$$

Wir zeigen $\exists \; y_0 \in B_\rho(0) : \mathcal{E}(y_0) = \beta$.

Angenommen $\nexists \; y_0 \in B_\rho(0) : \mathcal{E}(y_0) = \beta \Longrightarrow \nexists \; y_0 \in H : \mathcal{E}(y_0) = \beta$

$\Longrightarrow K_\beta = \emptyset$. Wende nun Lemma 2.5 mit $\varepsilon < \frac{1}{2}\alpha$ an.

$\overset{\text{Lemma}}{\underset{2.5}{\Longrightarrow}} \exists \delta \leq \varepsilon : \exists \Phi \in C^0(H \times [0,1]; H)$ sodass

(a) $\Phi(u,0) = u \quad \forall u \in H$

(b) $\Phi(u,1) = u \quad \forall u \in H: \mathcal{E}(u) > \beta + \varepsilon, \; \mathcal{E}(u) < \beta - \varepsilon$

(c) $\mathcal{E}(\Phi(u,t)) \leq \mathcal{E}(u) \quad \forall t \in H$

(d) $\Phi(E_{\beta+\delta}, 1) \subset E_{\beta-\delta}$.

Beachte $E_{\beta+\delta} \neq \emptyset$ da β ein Infimum über Energiewerte ist $\Longrightarrow \exists \; w \in H : \Phi(w,1) \in E_{\beta-\delta}$

Ein Widerspruch da $\beta = \inf \{ \mathcal{E}(y) \mid y \in H \}$