Material zur Vorlesung

Advanced Topics in the Calculus of Variations

Anna Dall'Acqua

Universität Ulm

Wintersemester 2019/20

Liebe Studierende,

dieses Skript soll eine Hilfe zur Vorbereitung sein.

Gute Begleiter sind folgende Bücher:

Ich wünsche Ihnen alles Gute, viel Erfolg und Spass mit der Variationsrechnung,

Anna Dall'Acqua

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Eine Reaktions-Diffusions-Gleichung

Sei $p > 1, \Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit Lipschitz-Rand.

Fragestellung: Existiert eine schwache Lösung $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ von

$$\begin{cases} -\Delta u &= \lambda u + |u|^{p-1}u, \quad \text{in } \Omega, \\ \quad u &= 0, \qquad\qquad\quad\ \ \text{auf } \partial\Omega \quad ? \end{cases} \tag{1.1}$$

Das bedeutet, dass die Identität

$$\int\limits_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi \, dx = \lambda \int\limits_{\Omega} u\varphi \, dx + \int\limits_{\Omega} |u|^{p-1} u\varphi \, dx$$

für alle $\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$ gelten soll.

Triviale Lösung: $u \equiv 0$. Daher fragen wir uns nun, ob positive Lösungen des Problems existieren.

Genauere Formulierung des Problems:

- Für welche p können wir die Nichtlinearität kontrollieren?
  Der Satz von Rellich-Kondrachov liefert

$$W_0^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$$

$$\begin{aligned} &\text{für } n = 2, \quad q \in [1, \infty) \\ &n \geq 3, \quad 1 - \frac{n}{2} < -\frac{n}{q} \Leftrightarrow \frac{n}{q} < \frac{n-2}{2} \\ &\Leftrightarrow q < \frac{2n}{n-2}. \end{aligned}$$

Somit gilt:

$$\begin{aligned} \Big| \int_\Omega |u|^{p-1} u \varphi \, dx \Big| &\leq \int_\Omega |u|^p |\varphi| \, dx \\ &\qquad \frac{p+1}{p} \qquad p+1 \qquad \frac{p}{p+1} + \frac{1}{p+1} = 1 \\ &\leq \left(\int_\Omega |u|^{p+1} \, dx \right)^{\frac{p}{p+1}} \left(\int_\Omega |\varphi|^{p+1} \right)^{\frac{1}{p+1}} < \infty \end{aligned}$$

für $u, \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$, falls:

$$\begin{aligned} &p \in (1, \infty), \text{ falls } n = 2 \\ p + 1 < \frac{2n}{n-2} \Leftrightarrow p < &\frac{n+2}{n-2}, \text{ falls } n \geq 3. \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Subkritisches Wachstum}}$

- Wie können wir unser Minimierungsproblem formulieren, sodass $u \equiv 0$ keine zulässige Lösung ist? Idee: Nebenbedingung; Motivation:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_\Omega |u + t\varphi|^{p+1} \, dx \Big|_{t=0} &= \frac{p+1}{2} \int_\Omega (|u + t\varphi|^2)^{\frac{p+1}{2} - 1} 2(u + t\varphi)\varphi \, dx \Big|_{t=0} \\ &= (p+1) \int_\Omega |u|^{p-1} u \varphi \, dx. \end{aligned}$$

Daher wollen wir

$$\mathcal{E}(u) = \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx - \lambda \int_\Omega u^2 \, dx$$

auf

$$M = \{ u \in W_0^{1,2}(\Omega) : \|u\|_{p+1}^{p+1} = 1 \}$$

minimieren.

- Für welche λ ist die Energie $\mathcal{E}$ koerzitiv?
  Sei λ_1 der erste Dirichlet Eigenwert von

$$\begin{cases} -\Delta\varphi &= \lambda\varphi, \quad \text{in } \Omega, \\ \quad\varphi &= 0, \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.2}$$

  λ_1 wird durch den Rayleight-Ritz-Quotienten

$$\lambda_1 = \min \left\{ \frac{\int\limits_\Omega |\nabla v|^2\,dx}{\int\limits_\Omega |v|^2\,dx} : v \in W_0^{1,2}(\Omega), v \neq 0 \right\} > 0$$

  charakterisiert.

  Für $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$ gilt nun

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(v) &= (1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}) \int\limits_\Omega |\nabla v|^2\,dx + \frac{\lambda}{\lambda_1} \underbrace{\left(\int\limits_\Omega |\nabla v|^2\,dx - \lambda_1 \int\limits_\Omega |v|^2\,dx \right)}_{\geq 0} \\ &\geq (1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}) \int\limits_\Omega |\nabla v|^2\,dx. \end{aligned}$$

  Somit ist $\mathcal{E}$ koerzitiv auf $W_0^{1,2}(\Omega)$ für $\lambda < \lambda_1$.

Satz 1.0.1. *Sei $n \geq 2$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Lipschitz-Gebiet. Ferner sei*

$$p \in (1, \infty), \textit{ falls } n = 2$$
$$p \in \left(1, \frac{n+2}{n-2}\right), \textit{ falls } n \geq 3.$$

Dann besitzt das Problem

$$\begin{cases} -\Delta u &= \lambda u + |u|^{p-1}u, \quad \textit{in } \Omega, \\ \quad u &= 0, \qquad\qquad\quad \textit{auf } \partial\Omega \end{cases} \tag{1.3}$$

für alle λ mit $\lambda < \lambda(\Omega)$ eine schwache Lösung $u \not\equiv 0, u \in W_0^{1,2}$, d.h., u löst

$$\int\limits_\Omega \nabla u \nabla\varphi\,dx = \lambda \int\limits_\Omega u\varphi\,dx + \int\limits_\Omega |u|^{p-1}u\varphi\,dx \quad \forall \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega).$$

Beweis. Sei $\alpha := \inf\{\mathcal{E}(v) : v \in W_0^{1,2}(\Omega), \|v\|_{p+1}^{p+1} = 1\}$.
Da $\lambda < \lambda_1$ gilt, ist $\mathcal{E}$ auf $W_0^{1,2}(\Omega)$ koerzitiv und das Problem ist aufgrund des Satzes von Rellich-Kondrachov wohlgestellt. Insbesondere gilt $\alpha \geq 0$.
Sei $(v_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset W_0^{1,2}(\Omega)$ eine Minimalfolge, d.h. $\|v_k\|_{p+1}^{p+1} = 1$, $\mathcal{E}(v_k)$ konvergiert monoton fallend gegen α.
Dann ist $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $W_0^{1,2}(\Omega)$ gleichmäßig beschränkt und nach Rellich-Kondrachov existiert eine Teilfolge $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und ein $v_0 \in W_0^{1,2}(\Omega)$, sodass

$$\begin{aligned} v_k &\rightharpoonup v_0 && \text{in } W_0^{1,2}(\Omega)\\ v_k &\to v_0 && \text{in } L^2(\Omega)\\ v_k &\to v_0 && \text{in } L^{p+1}(\Omega). \end{aligned}$$

Insbesondere gilt $\|v_0\|_{p+1}^{p+1} = 1$. Weiter folgt wegen der schwachen Unterhalbsstetigkeit der Norm in $W_0^{1,2}(\Omega)$ und der starken Konvergenz in $L^2(\Omega)$, dass

$$\liminf_{k\to\infty} \mathcal{E}(v_k) \geq \mathcal{E}(v_0) = \alpha$$

und daher ist v_0 ein Minimierer.
Da $|v_0| \in W_0^{1,2}(\Omega)$ und $\int_\Omega |\nabla v_0|^2\,dx = \int_\Omega |\nabla |v_0|^2|\,dx$, ist auch $|v_0|$ ein Minimierer. Wir erhalten eine positive Lösung.

Euler-Lagrange Gleichung:

Sei $\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$, dann gilt

$$\mathcal{E}(v_0) \leq \mathcal{E}\left(\frac{v_0 + t\varphi}{\|v_0 + t\varphi\|_{p+1}}\right) \quad \text{für alle } t.$$

Da $\|v_0\|_{p+1} = 1$ gilt, folgt:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt}\,\mathcal{E}\left(\frac{v_0 + t\varphi}{\|v_0 + t\varphi\|_{p+1}}\right)\Bigg|_{t=0}\\ &\underset{\text{Homogenität}}{=} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\|v_0 + t\varphi\|_{p+1}^2}\mathcal{E}(v_0 + t\varphi)\right)\Bigg|_{t=0}\\ &= \frac{d}{dt}\,\mathcal{E}(v_0 + t\varphi)\Big|_{t=0} - \frac{2}{p+1}\mathcal{E}(v_0) \cdot \frac{p+1}{2} \cdot 2\int_\Omega |v_0|^{p-1} v_0 \varphi\,dx\\ &= 2\int_\Omega \nabla v_0 \nabla\varphi\,dx - 2\lambda\int_\Omega v_0\varphi\,dx - 2\underbrace{\mathcal{E}(v_0)}_{=\alpha}\int_\Omega |v_0|^{p-1} v_0\varphi\,dx. \end{aligned}$$

Gilt also $\mathcal{E}(v_0) = \alpha = 1$, so hätten wir das ursprüngliche Problem gelöst. Ansonsten skalieren wir. v_0 genügt der Identität

$$0 = \int\limits_\Omega \nabla v_0 \nabla \varphi \, dx - \lambda \int\limits_\Omega v_0 \varphi \, dx - \int\limits_\Omega |\alpha^{\frac{1}{p-1}} v_0|^{p-1} v_0 \varphi \, dx.$$

Demnach erfüllt $\widetilde{v_0} := \alpha^{\frac{1}{p-1}} v_0$

$$0 = \int\limits_\Omega \nabla \widetilde{v_0} \nabla \varphi \, dx - \lambda \int\limits_\Omega \widetilde{v_0} \varphi \, dx - \int\limits_\Omega |\widetilde{v_0}|^{p-1} \widetilde{v_0} \varphi \, dx.$$

Also ist $\widetilde{v_0}$ die gesuchte Lösung. $\square$

Bemerkung 1.0.2.

(i) *Skalierungseigenschaften sind stets von großer Bedeutung.*

(ii) *Mittels Schaudertheorie und Bootstrapping erhält man eine glatte Lösung,* $u \in C^\infty(\Omega)$. *Gilt sogar* $\partial\Omega \in C^{k,\alpha}$, *so erhalten wir* $u \in C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$.

(iii) *Im Fall* $\Omega = B_1(0)$ *kann mit der Gidas-Ni-Nirenberg-Methode [3] eine rotationssymmetrische Lösung erzielt werden.*

In der Vorlesung betrachten wir den kritischen Fall: $n \geq 3,\ p = \frac{n+2}{n-2} =: p^*$.

Kapitel 2

Die Pohozaev-Identität

Proposition 2.0.1. *Sei* $u \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ *Lösung von*

$$-\Delta u = \lambda u + |u|^{p^*-1} u \quad \text{in } \Omega. \tag{2.1}$$

Dann gilt:

$$\frac{1}{2} \int\limits_{\partial\Omega} |u|^2 x \cdot \nu \, d\sigma = \lambda \int\limits_{\Omega} u^2 \, dx,$$

wobei ν *die äußere Normale an* $\partial\Omega$ *ist.*

Beweis. Idee: Multipliziere die Gleichung mit geeigneten Testfunktionen. Gemäß des Noether-Theorems gibt es zu jeder kontinuierlichen Symmetrie eine Erhaltungsgröße. Für $\lambda = 0$ ist das Problem sowohl skalierungs- als auch translationsinvariant. Daher sind u und $x \cdot \nabla u = \sum_{i=1}^{n} x_i \partial_i u$ gute Testfunktionen. Wir multiplizieren also (2.1) mit $\sum_{i=1}^{n} x_i \partial_i u$ und integrieren.
Erster Term:

$$\begin{aligned} \int\limits_{\Omega} (-\Delta u) \sum_{i=1}^{n} x_i \partial_i u \, dx &= -\sum_{i,j=1}^{n} \int\limits_{\Omega} \partial_j^2 u \, x_i \, \partial_i u \, dx \\ &= -\sum_{i,j=1}^{n} \underbrace{\int\limits_{\partial\Omega} \partial_j u \, \nu_j \, x_i \, \partial_i u \, d\sigma}_{(1)} + \sum_{i,j=1}^{n} \underbrace{\int\limits_{\Omega} \partial_j u \left[\delta_i^j \, \partial_i u + x_i \, \partial_{ij}^2 u \right] dx}_{(2),(3)}. \end{aligned}$$

(1) Randintegral: Da $u = 0$ auf $\partial\Omega$, sind alle tangentialen Ableitungen erster Ordnung 0. Somit gilt auf $\partial\Omega$: $\nabla u = \frac{\partial u}{\partial \nu} \cdot \nu$ und $\partial_i u = \frac{\partial u}{\partial \nu}\nu_i$. Es folgt:

$$\begin{aligned}\sum_{i,j=1}^{n} \int\limits_{\partial\Omega} \partial_j u\, \nu_j\, x_i\, \partial_i u\, d\sigma &= \sum_{i,j=1}^{n} \int\limits_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)^2 \nu_i\, \nu_j\, \nu_j\, x_i\, d\sigma \\ &= \int\limits_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)^2 x \cdot \nu\, d\sigma = \int\limits_{\partial\Omega} |\nabla u|^2 x \cdot \nu\, d\sigma.\end{aligned}$$

(2)

$$\sum_{i,j=1}^{n} \int\limits_{\Omega} \partial_j u\, \delta_i^j\, \partial_i u\, dx = \int\limits_{\Omega} |\nabla u|^2\, dx.$$

(3)

$$\begin{aligned}\sum_{i,j=1}^{n} \int\limits_{\Omega} \partial_j u\, x_i\, \partial_{ij}^2 u\, dx &= \sum_{i,j=1}^{n} \int\limits_{\partial\Omega} \partial_j u\, x_i\, \partial_j u\, \nu_i\, d\sigma \\ &\quad - \sum_{i,j=1}^{n} \int\limits_{\Omega} \partial_{ij}^2 u\, x_i\, \partial_j u\, dx - \sum_{i,j=1}^{n} \int\limits_{\Omega} \partial_j u\, \partial_j u\, dx \\ &= \frac{1}{2} \int\limits_{\partial\Omega} |\nabla u|^2\, x \cdot \nu\, d\sigma - \frac{n}{2} \int\limits_{\Omega} |\nabla u|^2\, dx.\end{aligned}$$

Demnach gilt

$$\int\limits_{\Omega} (-\Delta u) \sum_{i=1}^{n} x_i \partial_i u\, dx = -\frac{1}{2} \int\limits_{\partial\Omega} |\nabla u|^2\, x \cdot \nu\, d\sigma - \frac{n-2}{2} \int\limits_{\Omega} |\nabla u|^2\, dx.$$

Zweiter Term: Da $u = 0$ auf $\partial\Omega$

$$\begin{aligned}\lambda \int\limits_{\Omega} u \sum_{i=1}^{n} x_i\, \partial_i u\, dx &= -\lambda \int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} \partial_i u\, x_i\, u\, dx - \lambda \int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} u \cdot u\, dx \\ &= -\frac{\lambda}{2}\, n \int\limits_{\Omega} u^2\, dx.\end{aligned}$$

Dritter Term: Da $u = 0$ auf $\partial\Omega$

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |u|^{p^*-1}\, u \sum_{i=1}^n x_i\, \partial_i u\, dx &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \int_\Omega |u|^{p^*-1}\, x_i\, \partial_i u^2 \\
&= -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \int_\Omega |u|^{p^*-1}\, u^2 \\
&- \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \int_\Omega \frac{p^*-1}{2} |u|^{p^*-3}\, 2u\, \partial_i u\, x_i\, u^2\, dx \\
&= -\frac{n}{p^*+1} \int_\Omega |u|^{p^*+1}\, dx.
\end{aligned}$$

Insgesamt:

$$-\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} |\nabla u|^2\, x\cdot\nu\, d\sigma - \frac{n-2}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx = -\frac{\lambda}{2}\, n \int_\Omega u^2\, dx - \frac{n}{p^*+1}\int_\Omega |u|^{p^*+1}\, dx.$$

Multiplizieren wir die Gleichung mit u, so folgt

$$\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx = \lambda \int_\Omega u^2\, dx + \int_\Omega |u|^{p^*+1}\, dx.$$

Multiplizieren wir diese Identität mit $\frac{n-2}{2}$ und summieren dies zur Vorigen, so erhalten wir:

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} |\nabla u|^2\, x\cdot\nu\, d\sigma &= \lambda \int_\Omega u^2 \left(-\frac{n}{2} + \frac{n-2}{2}\right) dx + \int_\Omega |u|^{p^*+1} \left(\frac{n-2}{2} - \frac{n}{p^*-1}\right) dx \\
&= -\lambda \int_\Omega u^2\, dx,
\end{aligned}$$

da $\frac{n}{p^*+1} = \frac{n}{\frac{2n}{n-2}} = \frac{n-2}{2}$. □

Satz 2.0.2. *Sei Ω ein beschränktes Gebiet mit $\partial\Omega \in C^{2,\alpha}$ und sei Ω strikt sternförmig bezüglich 0, das heißt: $x\cdot\nu > 0$ für alle $x \in \partial\Omega$, wobei ν die äußere Einheitsnormale ist. Sei $u \not\equiv 0$ eine $C^2(\overline{\Omega})$ Lösung von*

$$-\Delta u = \lambda u + |u|^{p^*-1}.$$

Dann gilt $\lambda > 0$.

Bemerkung. *Luckhaus 1979: Jede schwache Lösung $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ von (2.1) ist gar eine klassische, $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$, sofern Ω ein $C^{2,\alpha}$ glattes Gebiet ist.*

Beweis. Nach Voraussetzung gilt $x \cdot \nu > 0$ auf $\partial\Omega$ und $\int\limits_{\Omega} |u|^2 \, dx > 0$.
Aus der Pohozaev-Identität ergibt sich nun notwendigerweise $\lambda \geq 0$. Gilt $\lambda = 0$, so folgt, wieder dank der Pohozaev-Identität, dass $\nabla u = 0$ auf $\partial\Omega$, insbesondere erhalten wir $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ auf $\partial\Omega$.
Wir betrachten nun

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} u(x) & x \in \Omega \\ 0 & x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega. \end{cases}$$

<u>Behauptung:</u> $\tilde{u}$ ist eine klassische Lösung auf $\mathbb{R}^n$.

<u>Beweisidee:</u> Sei τ die tangentiale Richtung.
$\partial_\tau u = 0$ auf $\partial\Omega$, $\quad \partial_\tau^2 u = 0$ auf $\partial\Omega$,
aber aus $\partial_\nu u = 0$ auf $\partial\Omega$ folgt $\partial_\tau \partial_\nu u = 0$ auf $\partial\Omega$.
Aus der Gleichung folgt auch $\partial_\nu^2 u = 0$ auf $\partial\Omega$.
Also ist $\tilde{u}$ in der Tat eine C^2- Funktion.
Für Lösungen von elliptischen Gleichungen gilt aber das Prinzip der eindeutigen Fortsetzbarkeit ([5]), somit ist $\tilde{u} \equiv 0$. Widerspruch.

Wir schließen, dass für $\lambda \leq 0$ keine nichttrivialen Lösungen existieren. □

Bemerkung 2.0.3.

(i) In einem Kreisring existieren nichttriviale Lösungen für alle $\lambda < \lambda_1$. ([1])

(ii) Für $\lambda = 0$ erhalten wir die Gleichung

$$-\Delta u = |u|^{p^*-1} u,$$

welche die Funktion (eine Skalierung der Funktion) charakterisiert, die die beste Sobolev-Konstante für die Einbettung

$$W_0^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^{p+1}(\Omega)$$

annimmt. In der Tat, wir haben gesehen, dass

$$\mathop{inf}_{\substack{u \in W_0^{1,2}(\Omega) \\ \|u\|_{p+1}=1}} \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx$$

angenommen wird. (p subkritisch!)

$$\mathop{inf}_{\substack{u \in W_0^{1,2}(\Omega) \\ \|u\|_{p+1}=1}} \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx = \mathop{inf}_{\substack{u \in W_0^{1,2}(\Omega) \\ \|u\|_{p+1}=1}} \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx}{\left(\int_\Omega |u|^{p+1} \, dx \right)^{\frac{2}{p+1}}} = S.$$

Somit gilt

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx \geq S \left(\int_\Omega |u|^{p+1} \, dx \right)^{\frac{2}{p+1}} \quad \forall u \in W_0^{1,2}(\Omega).$$

S ist die größte Konstante, sprich die optimale Sobolev-Konstante der Einbettung

$$W_0^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^{p+1}(\Omega), \qquad p \text{ subkritisch.}$$

Im kritischen Fall, $p = p^*$, wird die beste Konstante in einem beschränkten Ω nicht angenommen.

Anhang A

Differentialgeometrie

A.1 Flächen in $\mathbb{R}^m$

[2], $m = 3$.

Definition A.1.1. *Sei $S \subset \mathbb{R}^m, S \neq \emptyset$. Wir nennen S eine* ***Fläche*** *(2-dim. Mannigfaltigkeit), falls für alle $p \in S$*

- *ein $V \subset \mathbb{R}^m$ offen mit $p \in V$,*
- *ein $U \subset \mathbb{R}^2$ offen und $F : U \to \mathbb{R}^3$ glatt*

existieren, sodass:

(i) $F(U) = V \cap S$

(ii) $F : U \to V \cap S$ *ist ein Homöomorphismus*

(iii) Rang $DF(u) = 2 \quad \forall u \in U$,
das heißt, $\partial_{u_1} F(u), \partial_{u_2} F(u)$ *sind für alle* $u \in U$ *linear unabhängig.*

Wir nennen (V, F, U) eine lokale Parametrisierung.

Bemerkung A.1.2.

(i) Lokal kann eine Fläche immer als Graph dargestellt werden, d.h.:
$\forall p \in S \ \exists V \subset \mathbb{R}^m$*, sodass es, nach eventueller Rotation,*
$U \subset \mathbb{R}^2, g : U \to \mathbb{R}^{m-2}$ *gibt, sodass*

$$S \cap V = \{(u_1, u_2, g(u)) : (u_1, u_2) \in U\}.$$

(ii) *Weiter kann eine Fläche lokal als Niveaumenge dargestellt werden:* $\forall p \in S\ \exists V \subset \mathbb{R}^m$ *offen und* $g : V \to \mathbb{R}^{m-2}$, *sodass*

$$S \cap V = \{x \in V : g(x) = 0\}$$

und Rang $Dg(x) = m - 2 \quad \forall x \in V$.

Beispiele: Ebene, Sphäre.

Der Kegel $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2\}$ ist keine Fläche.

Definition A.1.3. *Sei* $S \subset \mathbb{R}^m$ *eine reguläre Fläche und* $p \in S$. *Dann ist*

$$\begin{aligned} T_p\, S := \{v \in \mathbb{R}^m : \exists \delta > 0 \textit{ und eine } C^1 - \textit{Kurve} \\ c : (-\delta, \delta) \to S \textit{ mit } c(0) = p, c'(0) = v\} \end{aligned}$$

die ***Tangentialebene*** *von* S *in* p. *Deren Elemente nennen wir* ***Tangentialvektoren***. *"Menge der Geschwindigkeitsvektoren in* p*".*

Lemma A.1.4. *Sei* $S \subset R^m$ *eine reguläre Fläche und* (V, F, U) *eine lokale Parametrisierung in* $p \in S$. *Sei* $F(\overline{u}) = p$. *Dann ist*

$$T_p\, S = span \left\{ \frac{\partial F}{\partial u^1}(\overline{u}), \frac{\partial F}{\partial u^2}(\overline{u}) \right\} \subset \mathbb{R}^m.$$

Insbesondere gilt dim $T_p\, S = 2 \quad \forall p \in S$.

Da $T_p\, S$ ein $2-$dimensionaler Untervektorraum des $\mathbb{R}^m$ ist, können wir, durch Restriktion des Skalarproduktes in $\mathbb{R}^m$ auf $T_p\, S$, darauf ein Skalarprodukt definieren. Dieses nennen wir die **erste Fundamentalform**.

$$\begin{aligned} g_p : T_p\, S \times T_p\, S \to \mathbb{R} \\ g_p(v, w) := \langle v, w \rangle_{\mathbb{R}^m}. \end{aligned}$$

Durch Fixieren einer Basis auf $T_p\, S$ können wir dieses Skalarprodukt durch eine Matrix darstellen. Sei (V, F, U) eine lokale Parametrisierung. Dann ist $\{\frac{\partial F}{\partial u^1}, \frac{\partial F}{\partial u^2}\}$ eine Basis von $T_p\, S$. Die Matrix $(g_{ij})^2_{i,j=1}$ mit

$$g_{ij} = \left\langle \frac{\partial F}{\partial u^i}, \frac{\partial F}{\partial u^j} \right\rangle_{\mathbb{R}^m}$$

liefert die lokale Darstellung der ersten Fundamentalform.
$(g_{ij})_{i,j=1}^2 = (DF(u))^t(DF(u))$.

Beachte: die erste Fundamentalform ist für reguläre Flächen symmetrisch und positiv definit.

Sei $f : S \to \mathbb{R}$, S eine reguläre Fläche. Wie können wir das Integral von f über S,

$$\int\limits_S f\,dA$$

definieren? Die Definition soll unabhängig von der lokalen Parametrisierung sein.

Sei (V, F, U) eine lokale Parametrisierung und $f : S \to \mathbb{R}$ stetig mit $\operatorname{supp}(f) \subset V \cap S$. Wir setzen dann:

$$\int\limits_S f\,dA := \int\limits_U f(F(u))\sqrt{\det(g_{ij})}\,du.$$

Ist S kompakt und $f : S \to \mathbb{R}$ stetig, so können wir das Integral mittels einer Zerlegung der Eins wie folgt definieren:
Da S kompakt ist, existieren endlich viele Parametrisierungen
$(V_1, F_1, U_1), \ldots, (V_k, F_k, U_k),\ k \in \mathbb{N}$, sodass

$$S = \bigcup_{j=1}^k (S \cap V_j).$$

Seien $\{\mathcal{X}_j\}_{j=1}^k$ stetige Funktionen, sodass $\mathcal{X}_j : V_j \cap S \to [0,1]$, $\operatorname{supp}(\mathcal{X}_j) \subset V_j \cap S$ und $\sum\limits_{j=1}^k \mathcal{X}_j(x) = 1 \quad \forall x \in S$.
Dann erhalten wir:

$$\begin{aligned}\int\limits_S f\,dA &= \int\limits_S \sum_{j=1}^k \underbrace{(f\mathcal{X}_j)}_{\text{supp in } V_j \cap S}\ dA \\ &= \sum_{j=1}^k \int\limits_S (f\mathcal{X}_j)\,dA\end{aligned}$$

und wenden die vorige Definition an.

Welche Gestalt hat $\sqrt{\det(g_{ij})}$?

$$\begin{aligned}(g_{ij})_{i,j=1}^2 &= (DF(u))^t(DF(u)) \\ &= \begin{pmatrix} |\partial_{u^1}F|^2 & \partial_{u^1}F \cdot \partial_{u^2}F \\ \partial_{u^1}F \cdot \partial_{u^2}F & |\partial_{u^2}F|^2, \end{pmatrix}\end{aligned}$$

und somit
$$\det(g_{ij}) = |\partial_{u^1}F|^2|\partial_{u^1}F|^2 - (\partial_{u^1}F \cdot \partial_{u^2}F)^2.$$

Insbesondere, falls S durch **eine** lokale Parametrisierung (V, F, U) beschrieben ist, so gilt:

$$\begin{aligned}\text{Flächeninhalt}(S) &= \int\limits_S 1\,dA \\ &= \int\limits_U \sqrt{|\partial_{u^1}F|^2|\partial_{u^1}F|^2 - (\partial_{u^1}F \cdot \partial_{u^2}F)^2}\,du.\end{aligned}$$

A.2 Die mittlere Krümmung

Definition A.2.1 (Normalenfeld)**.**
Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche. Ein ***Normalenfeld*** *aus S ist eine Abbildung*

$$N : S \to \mathbb{R}^3$$

$$p \mapsto N(p), \textit{ sodass } N(p) \perp T_pS \quad \forall p \in S.$$

Gilt zusätzlich $\|N(p)\| = 1$, so nennen wir sie ***Einheitsnormalenfeld****.*

Definition A.2.2 (Orientierbarkeit)**.**
Eine reguläre Fläche S heißt ***orientierbar****, falls ein glattes Normalenfeld $N : S \to \mathbb{R}^3$ existiert.*

Fortan betrachten wir **orientierbare Flächen**.

Frage: Wie könnte ein Krümmungsbegriff definiert werden?
Die Krümmung soll angeben, wie weit die Fläche von einer Ebene abweicht.
Idee: wir untersuchen, wie sich ein glattes Normalenfeld auf S verändert.

Problem: S weist keine lineare Struktur auf, daher können wir nicht differenzieren, $N : S \to \mathbb{S}^2$. Trotzdem kann man die lokale Veränderung untersuchen: mittels des Differentials.

Beachte:

Seien S_1, S_2 reguläre Flächen, $f : S_1 \to S_2$, mit $f \in C^k$, $k \in \mathbb{N}$.
Sind (V_1, F_1, U_1) mit $p \in S_1$, (V_2, F_2, U_2) mit $f(p) \in S_2$ beliebige Parametrisierungen und $f(V_1 \cap S_1) \subset V_2 \cap S_2$, so ist

$$F_2^{-1} \circ f \circ F_1 : \underbrace{U_1}_{\subset \mathbb{R}^2} \to \underbrace{U_2}_{\subset \mathbb{R}^2}$$

C^k- glatt.

Definition A.2.3. *Seien S_1, S_2 reguläre Flächen, $f : S_1 \to S_2$ glatt. Dann ist das **Differential von** f **in** p die Abbildung*

$$d_p f : T_p\, S_1 \to T_{f(p)}\, S_2$$

mit $(d_p f)(v) = \frac{d}{dt}(f \circ c)(t)|_{t=0} \in T_{f(p)}\, S_2$,
falls $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to S_1 \quad c(0) = p,\ c'(0) = v$ erfüllt.

Lemma A.2.4. *$d_p f$ ist wohldefiniert und linear.*

Beweis. Seien (V_1, F_1, U_1) lokale Parametrisierungen in $p \in S_1$,
(V_2, F_2, U_2) lokale Parametrisierung in $f(p) \in S_2$ und o.B.d.A. sei
$f(V_1 \cap S_1) \subset V_2 \cap S_2$. Sei weiter $\widetilde{f} := F_2^{-1} \circ f \circ F_1 : U_1 \to U_2$
und $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to S_1 \cap V_1$, sodass $c(0) = p,\ c'(0) = v \in T_p\, S$.
Dann gilt, mit $\widetilde{c}(t) := F_1^{-1} \circ c(t)$

$$\begin{aligned}
(d_p f)(v) &= \frac{d}{dt}(f \circ c)(t)|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt}(f \circ F_1 \circ F_1^{-1} \circ c)(t)|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt}(F_2 \circ \widetilde{f} \circ \widetilde{c})(t)|_{t=0} \\
&= D(F_2 \circ \widetilde{f})(\underbrace{\widetilde{c}(0)}_{=F_1^{-1}(p)})\, \frac{d}{dt}\widetilde{c}(0).
\end{aligned}$$

Nun folgt, dank $F_1(\tilde{c}(t)) = c(t)$, aber

$$(DF_1)(\tilde{c}(0))\tilde{c}'(0) = c'(0) = v$$

und somit

$$\tilde{c}'(0) = (DF_1)^{-1}(F_1^{-1}(p))v.$$

Wir schließen:

$$(d_p f)(v) = D(F_2 \circ \tilde{f})(F_1^{-1}(p))\,(DF_1)^{-1}(F_1^{-1}(p))v.$$

Die Formel hängt nicht von c ab und ist in v linear. $\square$

Für $N : S \to \mathbb{S}^2$, $p \in S$,

$$d_p N : T_p S \to T_{N(p)} \mathbb{S}^2.$$

Da

$$T_{N(p)} \mathbb{S}^2 = \{v \in \mathbb{R}^3 : \langle v, N(p)\rangle = 0\} = T_p S$$

gilt, ($N(p)$ ist die Normale in $N(p)$ zu $\mathbb{S}^2$) erhalten wir mit dieser Identifikation

$$d_p N : T_p S \to T_p S.$$

Definition A.2.5. *Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche, deren Orientierung durch N gegeben ist und es sei $p \in S$. Der Endomorphismus*

$$W_p : T_pS \to T_pS$$

$$W_p(x) := -d_pN(x)$$

*heißt **Weingartenabbildung**.*

Lemma A.2.6. *Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine orientierbare, reguläre Fläche. Dann ist die Weingartenabbildung bezüglich der ersten Fundamentalform selbstadjungiert, das heißt, es gilt*

$$g_p(v, W_p(w)) = g_p(W_p(v), w) \quad \forall v, w \in T_pS.$$

Daraus folgt, dass eine Basis von T_pS aus Eigenvektoren existiert. Die Eigenwerte heißen **Hauptkrümmungen**; wir schreiben $\kappa_1 \le \kappa_2$.

Definition A.2.7. *Seien κ_1, κ_2 die Eigenwerte der Weingartenabbildung. Dann ist*

$$K := \kappa_1 \cdot \kappa_2 \text{ die } \textbf{Gauß-Krümmung}$$

$$H := \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} \text{ die } \textbf{mittlere Krümmung}$$

$HN = \vec{H}$ der ***mittlere Krümmungsvektor****, wobei N das Einheitsnormalenfeld ist.*

Bemerkung A.2.8. *Nach dem Theorema egregium von Gauß hängt K nur von der ersten Fundamentalform ab.*

Definition A.2.9. *Die zur Weingartenabbildung assoziierte Bilinearform heißt* ***zweite Fundamentalform****:*

$$\begin{aligned} II_p : T_pS \times T_pS &\to \mathbb{R} \\ (X, Y) \mapsto II_p(X, Y) &= g_p(W_p(X), Y). \end{aligned}$$

<u>In lokalen Koordinaten:</u>

Sei (U, F, V) eine lokale Parametrisierung in $p = F(\overline{u})$, $x_i = \partial_{u^i} F$.
Wir betrachten $t \mapsto F(\overline{u} + te_j)$, $t \in (-\delta, \delta)$, δ klein genug. Dies ist eine Kurve auf S mit

$$\langle \partial_{u^i} F(\overline{u} + te_j), N(F(\overline{u} + te_j)) \rangle = 0 \quad \forall t.$$

Somit gilt

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} \langle \partial_{u^i} F(\overline{u} + te_j), N(F(\overline{u} + te_j)) \rangle|_{t=0} \\ &= \langle \partial_{u^i u^j} F(\overline{u}), N(F(\overline{u})) \rangle + \underbrace{\langle \partial_{u^i} F(\overline{u}), d_pN(\partial_{u^j} F(\overline{u})) \rangle}_{=-II_p(\partial_{u^i} F, \partial_{u^j} F)}. \end{aligned}$$

Demnach erhalten wir

$$\begin{aligned} II_p(\partial_{u^i} F, \partial_{u^j} F) &= \langle \partial^2_{u_i u_j} F(\overline{u}), N(F(\overline{u})) \rangle \\ &:= h_{ij} = h_{ji}, \end{aligned}$$

die Koeffizienten der zweiten Fundamentalform.

Weiter

$$\begin{aligned} h_{ij} &= II_p(\partial_{u^i}F, \partial_{u^j}F) \\ &= I_p(W_p(\partial_{u^i}F), \partial_{u^j}F) \\ &= I_p\left(\sum_{k=1}^{2} w_i^k \partial_{u^k}F, \partial_{u^j}F\right) \\ &= \sum_{k=1}^{2} w_i^k g_{kj}. \end{aligned}$$

Wir sehen nun $w_i^j = \sum_{k=1}^{2} g^{jk}h_{ki}$, wobei (g^{ij}) die Inverse der Matrix g_{ij} ist. Zudem ist $H = \text{Spur}\,(w_i^j)$ die mittlere Krümmung.

Satz A.2.10. *Sei S eine reguläre, orientierbare Fläche mit endlichem Flächeninhalt. Sie $\mathcal{H}$ das mittlere Krümmungsfeld und $\Phi : S \to \mathbb{R}^3$ ein glattes Normalenfeld mit kompaktem Träger.*

(i) Es gibt ein $\delta > 0$, sodass $S_t := \{p + t\Phi(p) : p \in S\}$ eine reguläre Fläche ist, sofern $|t| < \delta$.

(ii) Es gilt

$$\frac{d}{dt}\,A(S_t)|_{t=0} = -2\int\limits_S \langle \Phi, \mathcal{H}\rangle\, dA.$$

Das heißt: gilt $\mathcal{H} \equiv 0$, so ist S ein kritischer Punkt des Flächenfunktionals.

Wie verfahren wir in $\mathbb{R}^m, m \geq 4$? Es gibt in diesem Fall nicht nur eine Normale.

Allgemein für $f : B \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^m$ parametrisiert eine Fläche $M = f(B)$,

$$g_{ij} := \langle \partial_i f, \partial_j f\rangle_{\mathbb{R}^m},$$
$$(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}.$$

Sei $p \in f(B)$. Dann ist $N_pM := (T_pM)^\perp$ $(m-2)$-dimensional.
Die zweite Fundamentalform ist in diesem Fall durch

$$A : T_pM \times T_pM \to N_pM$$
$$(w_1, w_2) \mapsto \sum_{i,j=1}^{2} w_1^i A_{ij} w_2^j$$

definiert.

$w_k = \sum_{j=1}^{2} w_k^j \partial_j f, \;\; k = 1, 2.$

$A_{ij} := (\partial_{ij}^2 f)^\perp = \partial_{ij}^2 f - \langle \partial_{ij}^2 f, v_1 \rangle v_1 - \langle \partial_{ij}^2 f, v_2 \rangle v_2$

mit $v_1 = \frac{\partial_1 f}{|\partial_1 f|}, \overline{v}_2 = \partial_2 f - \langle \partial_2 f, v_1 \rangle v_1, \; v_2 = \frac{\widetilde{v}_2}{|\widetilde{v}_2|}.$

A ist ein Vektor von Matrizen.

Der mittlere Krümmungsvektor ist definiert durch

$$\mathcal{H} = \text{Spur}\,(G^{-1}A) = \sum_{i,j=1}^{2} g^{ij} A_{ji}.$$

Anhang B

Der Gaußsche Integralsatz

Der Gaußsche Integralsatz ist die Verallgemeinerung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung bzw. der Regel der partiellen Integration auf mehrdimensionale Integrale.

Dazu benötigen wir zuerst das Konzept von $\mathcal{C}^1$-glatt berandeten Gebieten.

Definition B.0.1. *Sei $G \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Gebiet. Wir sagen, G ist ein $\mathcal{C}^1$-glatt berandetes Gebiet, falls es zu jedem Randpunkt $x_0 \in \partial G$ eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^d$ von x_0 und eine stetig differenzierbare Funktion $g : U \to \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften gibt*

1. $G \cap U = \{x \in U : \ g(x) > 0\}$;
2. $\partial G \cap U = \{x \in U : \ g(x) = 0\}$;
3. $Dg(x) \neq 0$ *für alle* $x \in U$.

Sei $G \subset \mathbb{R}^d$ ein $\mathcal{C}^1$-glatt berandetes beschränktes Gebiet. Sei $x_0 \in \partial G$. Dann existieren eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^d$ und eine $\mathcal{C}^1$-glatte Funktion g so dass 1., 2. und 3. in Definition B.0.1 gelten. Wir definieren dann die **äußere Normale** an ∂G in x_0 als

$$\nu(x_0) := -\frac{\nabla g(x_0)}{\|\nabla g(x_0)\|_2}\,,$$

wobei $\nabla g(x_0) = (Dg(x_0))^t$ der Gradient von g in x_0 ist und $\|\cdot\|_2$ die Euklidische Norm ist. Somit können wir eine Abbildung

$$\nu : \partial G \to \mathbb{S}^{d-1}, \qquad x_0 \mapsto \nu(x_0)\,,$$

definieren, die **äußere Einheitsnormale an** ∂G.

Satz B.0.2. *Seien $G \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes, $\mathcal{C}^1$-glatt berandetes Gebiet und $\nu : \partial G \to \mathbb{S}^{d-1}$ die äußere Einheitsnormale an ∂G. Dann gibt es ein Oberflächenmaß $S(\cdot)$ definiert auf ∂G, so dass für jedes stetig differenzierbare **Vektorfeld** $f \in \mathcal{C}^1(\overline{G};\mathbb{R}^d)$ gilt:*

$$\int_G div(f(x))\,dx = \int_{\partial G} \langle f(x), \nu(x)\rangle \; dS(x)\;. \tag{B.1}$$

Insbesondere gilt für f mit kompaktem Träger in G:

$$\int_G div(f(x))\,dx = 0.$$

Für $f \in \mathcal{C}^1(\overline{G};\mathbb{R})$ und ein beliebiges $i \in \{1,\dots,d\}$ gilt:

$$\int_G \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\; dx = \int_{\partial G} f(x)\nu^i(x)\; dS(x)\;, \tag{B.2}$$

wobei ν^i die i-te Komponente von ν ist.

Bemerkung B.0.3.

1. *Die Divergenz eines stetig differenzierbaren Vektorfeldes f ist definiert durch:*
$$div(f(x)) := \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial f^i}{\partial x_i}(x),$$
somit für $G \subset \mathbb{R}^d$ haben wir $div : C^1(G;\mathbb{R}^d) \to C^0(G;\mathbb{R})$.

2. *Allgemeinere Regularitätsannahme auf G: G ist ein C^1-Polyeder ([4]).*

Korollar B.0.4 (Greenschen Formeln)**.**
Seien $G \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes, $\mathcal{C}^1$-glatt berandetes Gebiet und $\nu : \partial G \to \mathbb{S}^{d-1}$ die äußere Einheitsnormale an ∂G. Seien $f, g \in \mathcal{C}^2(\overline{G})$. Dann gilt:

$$\int_G (\nabla f, \nabla g)\; dx = \int_{\partial G} f(x)\; \partial_\nu g(x)\; dS(x) - \int_G f\Delta g\; dx$$
$$\int_G (f\Delta g - g\Delta f)\; dx = \int_{\partial G} [f(x)\partial_\nu g(x) - g(x)\partial_\nu f(x)]\; dS(x)\;.$$

Literaturverzeichnis

[1] Brezis-Nirenberg.

[2] Bär.

[3] Gidas-Ni-Nirenberg.

[4] Königsberger.

[5] Protter.