Elemente der Funktionentheorie, Klausur 1

Sommersemester 2017, Prof. Dr. Friedmar Schulz, Marius Müller

Erlaubte Hilfsmittel: keine (im Anhang befindet sich eine kleine Formelsammlung)
Es sind **120 Punkte** erreichbar, jedoch zählen 100 Punkte als 100 Prozent. Bitte auf jedem Blatt nur eine Aufgabe bearbeiten und dokumentenechte Stifte verwenden. Falls zwei undurchgestrichene Lösungen für dieselbe Aufgabe abgegeben werden, so wird die schlechtere gewertet. Daher bitte alle Rechenwege bis auf einen sauber durchstreichen. Antworten sind stets zu begründen. Das Angabenblatt darf nach Abgabe der Klausur mit nach Hause genommen werden. Bitte nichts, was in die Wertung eingehen soll, auf das Angabenblatt schreiben!
VIEL ERFOLG!

Aufgabe 1:(5 Punkte)
Berechne

$$\left| \frac{4+6i}{6+4i} \right|.$$

Aufgabe 2:(10 Punkte)
Zeige: Für $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq 2$ gilt

$$\sum_{j=0}^{k-1} \cos\left(j\frac{2\pi}{k}\right) = 0.$$

Aufgabe 3:(10 Punkte)
Finde alle Zahlen $z \in \mathbb{C}$ mit $z^3 = i$ und skizziere diese Zahlen als Punkte in der komplexen Zahlenebene.

Aufgabe 4:(5+7+8=20 Punkte)
a) Bestimme eine Parametrisierung des Kreises $\partial D(i;3) := \{z \in \mathbb{C} : |z-i| = 3\}$.
Hinweis: Unter einer Parametrisierung verstehen wir eine geschlossene Kurve γ und ein Intervall I sodass γ auf $\mathring{I}$ injektiv ist und $\gamma(I) = \partial D(i,3)$ gilt. Alle diese Eigenschaften müssen hier nicht nachgerechnet werden, es genügt völlig, eine solche Kurve und ein solches Intervall anzugeben.
b) Berechne

$$\int_{|z-i|=3} z \; dz.$$

Aufgabenteil (a) darf - muss aber nicht - hierfür verwendet werden.
c)[Nicht zu lang dran aufhalten!] Berechne

$$\int_{|z-i|=3} \overline{z} e^z \; dz.$$

Aufgabe 5:(10 Punkte)
Berechne

$$\int_{|z-i|=2} \frac{1}{(z^2+5)^2} dz.$$

Aufgabe 6:(10 Punkte)
Berechne

$$\int_{|z|=5} \frac{e^z}{z^2+\pi^2} dz.$$

Aufgabe 7: (5+10 = 15 Punkte)
a) Zeige, dass $\overline{\exp(z)} = \exp(\overline{z})$ für alle $z \in \mathbb{C}$.
b) Zeige, dass für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) z^k.$$

Für welche $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > 1$ gilt die Gleichung auch ?

Aufgabe 8: (10 Punkte)
Bestimme alle $z \in \mathbb{C}$ sodass

$$f(z) = e^{z^7 (\sin z)^{16}} + \overline{z}^2$$

komplex differenzierbar ist.

Aufgabe 9:(10 Punkte)
Es sei $f(z)$ holomorph auf $\mathbb{C}$ sodass $f(z) \in \mathbb{R}$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Zeige, dass f konstant ist.

Aufgabe 10:(10 Punkte)
Berechne

$$\int_{|z|=1} \sin(\overline{z}) dz.$$

Aufgabe 11:(10 Punkte)
Wir betrachten den metrischen Raum $\mathbb{C}_\infty$ versehen mit dem chordalen Abstand

$$\chi_2(z_1, z_2) := \begin{cases} \frac{|z_1 - z_2|}{\sqrt{1+|z_1|^2}\sqrt{1+|z_2|^2}} & z_1, z_2 \neq \infty \\ \frac{1}{\sqrt{1+|z_1|^2}} & z_2 = \infty, z_1 \neq \infty \\ \frac{1}{\sqrt{1+|z_2|^2}} & z_2 \neq \infty, z_1 = \infty \\ 0 & z_1 = z_2 = \infty \end{cases}$$

Es muss nicht gezeigt werden, dass es sich bei $(\mathbb{C}_\infty, \chi_2)$ um einen metrischen Raum handelt. Zeige, dass der so definierte metrische Raum kompakt ist, das heißt für jede Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}_\infty$ gibt es eine Teilfolge $(z_{l_n})_{n\in\mathbb{N}}$ und $z \in \mathbb{C}_\infty$ sodass $\chi_2(z_{l_n}, z) \to 0$ für $n \to \infty$.

Formelsammlung

- Cauchy'sche Integralformel (für Ableitungen). Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet für das gewisse Vorraussetzungen gelten, die hier nie überprüft werden müssen. Dazu sei f holomorph auf Ω und stetig auf $\overline{\Omega}$. Dann gilt für $z_0 \in \Omega$:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \tag{1}$$

- Diverse Identitäten für Funktionen:

$$\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \quad (z \in \mathbb{C}). \tag{2}$$

$$\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1} \quad (z \in \mathbb{C}). \tag{3}$$

$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k} \quad (z \in \mathbb{C}). \tag{4}$$

$$\sinh(z) = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} z^{2k+1} \quad (z \in \mathbb{C}). \tag{5}$$

$$\cosh(z) = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} z^{2k} \quad (z \in \mathbb{C}). \tag{6}$$

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \quad (z \in \mathbb{C}, |z| < 1). \tag{7}$$

- Einige Identitäten für hypebolische Funktionen:

$$\cosh^2(z) - \sinh^2(z) = 1 \quad (z \in \mathbb{C}). \tag{8}$$

$$\sinh(iz) = i\sin(z) \quad (z \in \mathbb{C}). \tag{9}$$

$$\cosh(iz) = \cos(z) \quad (z \in \mathbb{C}). \tag{10}$$

- Identitäten für Summen:

$$\sum_{k=0}^{n-1} z^k = \frac{1 - z^n}{1 - z} \quad (z \in \mathbb{C}, z \neq 1, n \in \mathbb{N}). \tag{11}$$

$$(z_1 + z_2)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z_1^k z_2^{n-k} \quad (z_1, z_2 \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}). \tag{12}$$

- Cauchy-Riemann Differenzialgleichungen: Es sei f auf einer offenen Mengee $D \subset \mathbb{C}$ gegeben und $z_0 = x_0 + iy_0 \in D$. Definiere $u(x, y) := \mathrm{Re} f(x + iy)$ und $v(x, y) := \mathrm{Im} f(x+iy)$. Ist f bei z_0 komplex differenzierbar so gilt bei (x_0, y_0)
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{13}$$
Sind die oben genannten Ableitungen auf D stetig und erfüllen die Differenzialgleichungen bei (x_0, y_0), so kann auch gefolgert werden, dass f bei z_0 komplex differenzierbar ist.

- Wir definieren den komplexen Logarithmus wie folgt. Mit der Konvention $-\pi < \arg(z) \leq \pi$ setzen wir (mengenwertig)
$$\log(z) = \log|z| + i\arg(z) + 2\pi in \quad (n \in \mathbb{Z}) \tag{14}$$
Den Zweig des Logarithmus, der sich für $n = 0$ ergibt nennen wir Hauptzweig des Logarithmus (und dieser definiert damit tatsächlich eine Funktion)

- Die n - ten Einheitswurzeln: Für $n \in \mathbb{N}$ gilt: Alle Lösungen der Gleichung $z^n = 1$ sind gegeben durch
$$z_j = e^{\frac{2j\pi i}{n}} \quad j = 0, ..., n-1. \tag{15}$$

- Substitutionsregel für reelle (!) Integrale. Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Dann gilt
$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)dy. \tag{16}$$

- Eine Wertetabelle für Werte des Sinus und Cosinus

x	$\sin(x)$	$\cos(x)$
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0

- Ein Paar Formeln zur Riemann'schen Zahlenkugel. Die Riemann'sche Zahlenkugel ist gegeben durch
$$S = \left\{ (\xi, \eta, \mu) \in \mathbb{R}^3 \mid \xi^2 + \eta^2 + \left(\mu - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \right\} \tag{17}$$

Insbesondere gilt für $(\xi, \eta, \mu) \in S$, dass $\xi^2+\eta^2+\mu^2 = \mu$. Wir konstruierten in der Vorlesung eine Abbildung

$$\phi : S \to \mathbb{C}_\infty \tag{18}$$

definiert durch

$$\phi(\xi, \eta, \mu) = \frac{\xi + i\eta}{1-\mu} \quad (\mu < 1) \tag{19}$$

und $\phi(0,0,1) = \infty$. Die Umkehrabbildung ist gegeben durch

$$\phi^{-1}(z) = \left(\frac{\mathrm{Re}(z)}{|z|^2+1}, \frac{\mathrm{Im}(z)}{|z|^2+1}, \frac{|z|^2}{|z|^2+1} \right) \quad (z \in \mathbb{C}) \tag{20}$$

und

$$\phi^{-1}(\infty) = (0,0,1). \tag{21}$$

Eine weitere Eigenschaft:

$$|\phi(\xi, \eta, \mu)|^2 = \frac{\mu}{1-\mu}. \tag{22}$$

- Der Residuensatz: Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und f holomorph in $\Omega \setminus E$, wobei E lediglich aus isolierten Singularitäten von f besteht. Dann gilt für jede geschlossene Kurve γ in Ω:

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_j n(\gamma, z_j) \mathrm{Res}_{z=z_j}(f(z)) \tag{23}$$

wobei die Summe über alle Singularitäten von f läuft, die von γ umschlossen werden, $n(\gamma, z_j)$ die Windungszahl bezeichnet und $\mathrm{Res}_{z=z_j}(f(z))$ das Residuum von f bei z_j, das heißt den $-1-sten$ Koeffizienten einer Laurentreihe von f um z_j.

- Der Cauchy'sche Integralsatz: Es sei Ω ein hinreichend glattes Gebiet und f holomorph in Ω und stetig auf $\overline{\Omega}$. Dann gilt

$$\int_{\partial\Omega} f(z)\, dz = 0.$$

- Komplexwertige partielle Ableitungen: Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen. Wir definieren für $f : \Omega \to \mathbb{C}$

$$f_x(z) = \lim_{h \to 0, h \in \mathbb{R}} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \tag{24}$$

Sowie

$$f_y(z) = \lim_{h \to 0, h \in \mathbb{R}} \frac{f(z+ih) - f(z)}{ih} \tag{25}$$

Damit kann man dann definieren

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}(f_x - i f_y) \tag{26}$$

und

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}(f_x + i f_y). \tag{27}$$

Die Erfülltheit der Cauchy Riemannschen Differentialgleichungen in einem Gebiete G ist äquivalent zu $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$ in dem Gebiet $\widetilde{G} := \{x+iy|(x,y) \in G\}$.

- Der Laplace Operator: Ist $G \subset \mathbb{R}^2$ offen $u : G \to \mathbb{R}$ eine auf G zweimal differenzierbare Funktion so heißt

$$\Delta u := u_{xx} + u_{yy} \tag{28}$$

der Laplace-Operator von u. Zweimal stetig differenzierbare Funktionen, die den Laplace-Operator annulieren, heißen harmonisch. Ist f holomorph auf G, so annulieren $u(x,y) := \mathrm{Re} f(x+iy)$ und $v(x,y) := \mathrm{Im} f(x+iy)$ den Laplace-Operator auf $\widetilde{G} := \{(x,y)|x+iy \in G\}$.