Universität Ulm

Abgabe: Dienstag, 13.06.2017

Prof. Dr. Friedmar Schulz
Marius Müller
Sommersemester 2017
Punktzahl: 23

Übungen Elemente der Funktionentheorie: Blatt 1

In diesem Übungsblatt wollen wir die Arithmetik im Komplexen üben. Macht euch noch einmal klar, was für verschiedene Möglichkeiten wir haben, eine komplexe Zahl aufzuschreiben und wie bestimmte Operationen im Komplexen funktionieren. Auf diesem Blatt benötigen wir - auch wenn es in der Vorlesung nicht explizit zur Sprache kam - dass die Geometrische Summe und der Binomische Lehrsatz mit komplexen Argumenten genau so gelten wie im Reellen. Die Beweise sind identisch zu den Analysis-1-Beweisen (falls diese damals nicht bereits für komplexe Zahlen geführt worden sind).

3. Es sei $z = 1 + \sqrt{3}i$. Finde Real- und Imaginärteil von $\frac{1}{z}$, und finde alle Zahlen w, sodass $w^2 = z$. Gebe außerdem eine geschlossene Formel für z^{10} an. (3)

Hinweis: Man kann für $\frac{1}{z}$ entweder den Vorlesungsaufschrieb verwenden, oder die lustige Identität $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$.

4. Berechne (1)

$$\left| \frac{3+5i}{5+3i} \right|.$$

5. Es sei $z \in \mathbb{C}$. Definiere $w := i\frac{z-i}{z+i}$. Zeige: Ist w eine reelle Zahl, so gilt $|z| = 1$. (3)

6. (3)

(a) Zeige: Für $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\cos(nx) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} (-1)^k \cos(x)^{n-2k} \sin(x)^{2k},$$

wobei $\lfloor \cdot \rfloor$ die Gaußklammer bezeichnet. Bemerkung: diese Formel verallgemeinert $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$.

(b) Zeige: Für $z \in \mathbb{C}$ ist

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} |z|^{2k} \overline{z}^{n-2k} \in \mathbb{R}.$$

7. In der folgenden Aufgabe geht es um die komplexen Einheitswurzeln, die wie in der Vorlesung definiert sind durch (5+2*)

$$z_j = \cos\left(j\frac{2\pi}{k}\right) + i\sin\left(j\frac{2\pi}{k}\right), \quad j = 0, ..., k-1.$$

. Ein allgemeiner Hinweis für die Aufgabe, der aber zu begründen ist, sofern man ihn verwendet: $z_j = z_1^j$.

(a) Zeige $\overline{z_j} = z_{k-j}$ für $j = 1, ..., k-1$.

(b) Zeige

$$\sum_{j=0}^{k-1} z_j = 0.$$

(c) Für die nächste Aufgabe definieren wir noch $z_k = \cos\left(k\frac{2\pi}{k}\right) + i\sin\left(k\frac{2\pi}{k}\right) = 1$. Zeige:

$$\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} z_j = \pm\left(2 + 2\cos\left(\frac{2\pi}{k}\right)\right)^{\frac{k}{2}}.$$

Bonus: Zeige, dass der exakte Wert der Summe $-2^k \cos\left(\frac{\pi}{k}\right)^k$ ist, d.h. dass der Fall „−“immer eintritt.

Hinweis: Berechne das konjugiertkomplexe von der linken Seite um zu zeigen, dass es sich bei dieser um eine reelle Zahl handelt.

8. Zeige: Für $z, w \in \mathbb{C}$ gilt stets (2)

$$|z + w| \leq |z| + |w|.$$

9. Es sei $P(z) = a_0 z^0 + ... + a_n z^n$ ein Polynom in $\mathbb{C}$ mit reellen, nichtnegativen Koeffizienten $a_0, ..., a_n \geq 0$. Zeige: Ist $a_n > \sum_{k=0}^{n-1} a_k$, so liegt jede Nullstelle von $P(z)$ in $D(0,1)$. Bonus: Kannst du ein ähnliches Kriterium hinschreiben dafür, dass jede Nullstelle in $D(0,r)$ liegt ? (3+1*)

10. Für $w \in \mathbb{C}$ definieren wir (3)

$$z_w := \begin{cases} \sqrt{|w|}\frac{w+|w|}{|w+|w||} & w \notin \mathbb{R}_{<0} \\ i\sqrt{-w} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeige $z_w^2 = w$ und $Re(z_w) \geq 0$. Zeige außerdem, dass für $w, w' \in \mathbb{C}$ $z_{ww'} = z_w z_{w'}$ dann und nur dann gilt wenn $-\pi < \arg(w) + \arg(w') \leq \pi$.

Hinweis: Zeige $arg(z_w) = \frac{arg(w)}{2}$. Dies muss nicht unbedingt aus der Formel gefolgert werden sondern kann auch aus (fast) direkt aus den Eigenschaften $z_w^2 = w$ und $Re(z_w) \geq 0$ gefolgert werden.