Universität Ulm

Abgabe: Donnerstag, 9.11.2017

Prof. Dr.Anna Dall'Acqua
Marius Müller
Wintersemester 2017/18
Punktzahl: keine

Übungen Variationsrechnung: Blatt 2

5. (Sobolevräume, Lipschitzstetigkeit und Approximation)

Für diese Aufgabe sei $1 \leq p < \infty$. Sei außerdem $(\phi_\epsilon)_{\epsilon>0}$ eine Familie mit Standard-Mollifiern. Wir wollen in dieser Aufgabe benutzen, dass für jedes $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen gilt, dass $\overline{C_0^\infty(\Omega)}^{||\cdot||_{L^p(\Omega)}} = L^p(\Omega)$. Das liegt daran, dass für $u \in L^p(\Omega)$ $(u * \phi_\epsilon)_{\epsilon>0}$ in $L^p(\Omega)$ gegen u konvergiert.

(a) Zeige: Es sei $q > 1$ so, dass $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ und $q = \infty$ im Falle von $p = 1$. Sei $u \in L^q(\Omega)$. Zeige: Gibt es ein $C > 0$ so, dass für alle $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ gilt

$$\left| \int u \partial_{x_j} \phi dx \right| \leq C ||\phi||_{L^p(\Omega)} \tag{1}$$

so gilt, dass $u \in W^{1,q}(\Omega)$.

(b) Zeige, dass jede auf $\mathbb{R}$ Lipschitzstetige Funktion in eine schwache Ableitung hat, die in $L^\infty(\mathbb{R})$ liegt.
Hinweis: Es sei u Lipschitzstetig auf $\mathbb{R}$ und $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Zeige zunächst dass gilt

$$\int u \phi' dx = \lim_{n \to \infty} \int u(x) n \left(\phi \left(x + \frac{1}{n} \right) - \phi(x) \right) dx \tag{2}$$

Verwende die Substitutionregel um Gleichung (1) mit $p = 1$ zu erreichen. Wenn du es nicht glaubst, dann verifiziere mit Hilfe einer Maßtheorie-Induktion, dass die Substitutionsregel in dem Spezialfall wo du sie benutzt gilt.

(c) Es gelte (1) für $p = \infty$. Was kann man über u sagen ?

(d) Lässt sich (b) auf $\mathbb{R}^n$ oder offene Mengen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ verallgemeinern ?
Hinweis: Ja, vor der Substituation muss man wegen dem kompakten Träger von ϕ keine Angst haben.

(e) Es sei $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Zeige,

- $u * \phi_\epsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ und $\partial_{x_i}(u * \phi_\epsilon) = (D_{x_i} u) * \phi_\epsilon$.
- $||u * \phi_\epsilon||_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq ||u||_{L^p(\mathbb{R}^n)}$
- Gilt auch $||u * \phi_\epsilon||_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq ||u||_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}$?
- $||u * \phi_\epsilon - u||_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \to 0$ für $\epsilon \to 0$.
- Was geht schief, wenn man sich auf einer allgemeinen offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ befindet?

(f) Lies dir folgendes Resultat durch:
Satz: Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und C^2-glatt berandet. Dann gibt es einen stetigen linearen Operator $i : W^{1,p}(\Omega) \to W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, der erfüllt: Für $u \in W^{1,p}(\Omega)$ gilt stets $i(u)_{|\Omega} = u$ fast überall in Ω.

(g) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und C^2-glatt berandet und es sei $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Dann gilt $(i(u) * \phi_\epsilon) |_\Omega \to u$ in $W^{1,p}(\Omega)$.

(h) BONUS: Es sei C die Cantormenge und (C_n) die Menge im n- ten Schritt der Konstruktion dieser. Definiere

$$F_n(x) := \frac{\lambda([0, x] \cap C_n)}{\lambda(C_n)} \quad x \in [0, 1] \tag{3}$$

wobei λ das eindimensionale Lebesgue-Maß bezeichnet. Es kann ohne Beweis vorausgesetzt werden, dass F_n auf $[0, 1]$ gleichmäßig gegen eine Funktion $F \in C[0, 1]$ konvergiert, siehe `https://en.wikipedia.org/wiki/Cantor_function`. Zeige, dass $F \in W^{1,\infty}((0, 1) \setminus C)$.

(i) BONUS: Zeige, dass F keine Fortsetzung auf $W^{1,p}(0, 1)$ besitzen kann.

6. (Perimeter und Minimalflächen)

Definition: Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Eine Lebesgue-messbare Menge $E \subset \mathbb{R}^n$ hat endlichen Perimeter wenn

$$\mathcal{P}(E,\Omega) = \int_\Omega |D\chi_E| := \sup_{\phi \in C_c^1(\Omega), ||\phi||_\infty \leq 1} \int_\Omega \chi_E \operatorname{div}\phi \, dx < \infty \tag{4}$$

Im Folgenden bezeichne E stets eine Lebsegue-messbare Menge.

(a) Zeige $\mathcal{P}(\Omega,\Omega) = 0$.

(b) Zeige; Für $\Omega_1 \subset \Omega_2$ gilt stets $\mathcal{P}(E,\Omega_1) \leq \mathcal{P}(E,\Omega_2)$. Kann $<$ bereits gelten, wenn $\Omega_2 \setminus \Omega_1$ eine Lebesguesche Nullmenge ist ?

(c) Mache dich vertraut mit folgender

Definition: Eine messbare Menge $E \subset \mathbb{R}^n$ heißt Cappacioli-Menge, falls für jede beschänkte offene Menge Ω gilt, dass $\mathcal{P}(E,\Omega) < \infty$.

Zeige nun, dass es eine Cappacioli-Menge E gibt mit $\mathcal{P}(E,\mathbb{R}^n) = \infty$

(d) Zeige, dass stets gilt $\mathcal{P}(E,\Omega) = \mathcal{P}(\Omega \setminus E,\Omega)$.

(e) Zeige, dass für $E_1, E_2 \subset \mathbb{R}^n$ Lebesgue-messbar mit $\operatorname{dist}(E_1,E_2) > 0$stets gilt

$$\mathcal{P}(E_1 \cup E_2,\Omega) = \mathcal{P}(E_1,\Omega) + \mathcal{P}(E_2,\Omega). \tag{5}$$

Gilt für disjunkte Mengen noch eine Ungleichung? Gib ein Beispiel für disjunkte Mengen E_1, E_2 sodass die Ungleichung strikt gilt.

(f) Es sei $(E_k)_{k=1}^\infty \subset \mathbb{R}^n$ so, dass $E_k \subset E_{k+1}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und

$$\bigcup_{k=1}^\infty E_k = E. \tag{6}$$

Zeige, dass $\mathcal{P}(E,\Omega) \leq \liminf_{k\to\infty} \mathcal{P}(E_k,\Omega)$. Finde ein Beispiel wo $'<'$ gilt.

(g) Betrachte das folgende Variationsproblem, das sogenannte Minimalflächenproblem: Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und und beschränkt und sei D eine Cacciopoli-Menge. Definiere

$$M := \{F \subset \mathbb{R}^n \text{ Lebesgue-messbar} |\ |D \setminus F \cap \Omega^C| = |F \cap \Omega^C \setminus D| = 0\} \tag{7}$$

Zeige: Es gibt eine Menge $E \in M$ sodass

$$\mathcal{P}(E,\mathbb{R}^n) = \inf_{F \in M} \mathcal{P}(F,\mathbb{R}^n) \tag{8}$$

Hinweis: Betrachte eine Folge $(F_k) \subset M$ sodass $\mathcal{P}(F_k,\mathbb{R}^n) \downarrow \inf_{F\in M} \mathcal{P}(F,\mathbb{R}^n)$. Sei $R > 0$ sodass $\Omega \subset B_R(0)$. Nun gilt sicherlich, dass $(\chi_{F_k \cap B_R(0)})$ in $L^1(B_R(0))$ beschränkt ist. Zeige, dass die Folge auch iun $BV(B_R(0))$ beschränkt ist und folgere, dass sie in $L^1(B_R(0))$ eine konvergente Teilfolge hat. Verwende die Umkehrung des Satzes von Lebegue um zu zeigen, dass der Grenzwert einer solche Teilfolge fast überall mit der charakteristischen Funktion einer Menge $\widetilde{E}$ übereinstimmen muss. Dein Kandidat für den Minimierer ist $\widetilde{E} \cup (D \cap B_R(0)^C)$.

(h) Gebe eine physikalische Interpretation dieses Problems für $\Omega = B_2(0) \times (0,1) \subset \mathbb{R}^3$ und $D = (B_1(0) \times \{0\}) \cup (B_1(0) \times \{1\})$.(Alle Bälle sind hier als Teilbälle von $\mathbb{R}^2$ aufzufassen).

7. (Approximation von BV-Funktionen)

(a) Zeige (einen Teil der) Dreiecksungleichung für die BV-Norm, d.h. zeige für $f, g \in BV(\Omega)$

$$\int_\Omega |D(f+g)| \leq \int_\Omega |Df| + \int_\Omega |Dg| \tag{9}$$

(b) Es sei $f \in BV(\mathbb{R}^n)$. Zeige

$$\int_{\mathbb{R}^n} |Df| = \lim_{\epsilon\to 0} \int_{\mathbb{R}^n} |Df * \phi_\epsilon| = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla(f * \phi_\epsilon)| dx \tag{10}$$

Kann das resultat für allgemeine offene $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ gerettet werden ?

Hinweis: Zeige mit Fubini für $\phi \in C_0^1(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$:

$$\int (f * \phi_\epsilon)(x) \operatorname{div}\phi(x) dx = \int \int f(y)(\operatorname{div}\phi * \phi_\epsilon)(y) dy \tag{11}$$

(c) Zeige mithilfe der vorigen Teilaufgabe für Lebesgue-messbare Mengen und beschränkte Mengen $E_1, E_2 \subset \mathbb{R}^n$

$$\mathcal{P}(E_1 \cap E_2, \mathbb{R}^n) + \mathcal{P}(E_1 \cup E_2, \mathbb{R}^n) \leq \mathcal{P}(E_1, \mathbb{R}^n) + \mathcal{P}(E_2, \mathbb{R}^n) \tag{12}$$

Hinweis: Der Beweis ist gar nicht so offensichtlich. Definiere $u_\epsilon = \chi_{E_1} * \phi_\epsilon$ und $v_\epsilon = \chi_{E_2} * \phi_\epsilon$. Verwende die vorherige Teilaufgabe auf der rechten Seite und vergegenwärtige dir, dass $u_\epsilon v_\epsilon$ in L^1 gegen $\chi_{E_1 \cap E_2}$ konvergiert, ebenso wie $u_\epsilon + v_\epsilon - u_\epsilon v_\epsilon$ in L^1 gegen $\chi_{E_1 \cap E_2}$ konvergiert.

(d) Vollende den Beweis von Satz 2.9. Hierbei sind folgende Ideen nützlich:

(i) Warum kann man m und D_1 so wählen wie sie in der Vorlesung gewählt wurden? Man verlangt, dass

$$\int_{D \setminus D_1} |Dv| < \epsilon. \tag{13}$$

Hinweis: Vergegenwärtige dir noch einmal, was BV Funktionen mit endlichen Radonmaßen zu tun haben.

(ii) Informiere dich in dem Infoblatt nochmals über die zerlegung der Eins und betrachte nochmals die Konstruktion der Funktionen (ζ_k). Beweise, dass für alle $x \in \Omega$ gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} \nabla \zeta_k(x) = 0 \tag{14}$$

Hinweis: Wegen der lokalen Endlichkeit der Summe lassen sich Abletiung und Reihe für jedes x vertauschen.

(iii) Zeige, dass v_ϵ in $L^1(\Omega)$ gegen v konvergiert.
Hinweis: Beppo-Levi.

(iv) Unter Verwendung der Techniken in den Teilaufgaben (b) zeige, dass

$$\int_\Omega |Dv_\epsilon| = \int_\Omega |Dv| + o(\epsilon). \tag{15}$$

Ab hier wollen wir noch einige Aussagen beweisen, die wir in der Vorlesung verwendet haben.

(e) Es sei $E \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und C^2-glatt berandet. Wir wollen zeigen, dass es $\psi \in C_0^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ gibt so, dass $\psi(x) = \mu_E(x)$ auf ∂E.
Hinweis: Wenn E einen C^2-glatten Rand hat, dann gibt es zu jedem $x \in \partial E$ eine offene Umgebung $U_x \subset \mathbb{R}^n$ von x und $\Phi_x : U_x \to \mathbb{R}$ eine C^2-Abbildung, sodass $\Phi(x) > 0$ äquvalent zu $x \in E \cap U_x$ ist. Die äußere Normale ist dann auf $\partial E \cap U_x$ gegeben durch

$$\nu(y) = \frac{-\nabla \Phi_x(y)}{|\nabla \Phi_x(y)|} \tag{16}$$

Nun wähle für $x \in \partial E$ eind $\delta_x > 0$ sodass $\overline{B_{\delta_x}(x)} \subset U_x$. Zeige jetzt, dass die ∂E mit endlich vielen von diesen $B_{\delta_x}(x)$ überdecken lässt und wähle bezüglich der Vereinigung dieser endlich vieler Bälle eine Zerlegung der Eins. Verwende die Zerlegung der Eins um die oben in der rechten Seite von (16) lokal definierte Funktion global zu machen.

(f) Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Zeige, dass es Funktionen $(\chi_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset C_0^\infty(\Omega)$ gibt mit $0 \leq \chi_k \leq 1$ so, dass χ_k punktweise und monoton gegen χ_Ω konvergiert. Für welche $p \in [1, \infty]$ konvergiert $\chi_k \to \chi_\Omega$ in $L^p(\Omega)$?
Hinweis: Für $k \in \mathbb{N}$ sei $\Omega_k := B_k(0) \cap \{x \in \Omega : \operatorname{dist}(x, \Omega^C) > \frac{1}{k}\}$. Wähle eine Zerlegung der Eins zur Überdeckung $(\Omega_k)_{k=1}^{\infty}$ und betrachte Partialsummen von dieser zerlegung der Eins.

8. (Konvexität)

Es sei X ein Banachraum und $K \subset X$ konvex. Es heißt $\mathcal{E} : K \to \mathbb{R}$ aif K konvex falls

$$\forall u, v \in K, t \in (0,1) : \mathcal{E}(tu + (1-t)v) \leq t\mathcal{E}(u) + (1-t)\mathcal{E}(v) \tag{17}$$

Dazu heißt $\mathcal{E}$ strikt konvex, falls Gleichheit oben genau dann gilt, wenn $u = v$.

(a) Es sei X reflexiv, $K \subset X$ konvex und abgeschlossen und $\mathcal{E} : K \to \mathbb{R}$ koerziv und schwach unterhalbstetig. Zeige, dann nimmt $\mathcal{E}$ auf K sein Infimum an, d.h es gibt ein $\mathcal{E}(v) = \inf_{u \in K} \mathcal{E}(u)$

(b) Seien K , $\mathcal{E}$ wie in (a). Zeige: Falls man zusätzlich vorraussetzt, dass $\mathcal{E}$ strikt konvex ist, so gibt es genau ein $v \in K$ sodass $\mathcal{E}(v) = \inf_{u \in K} \mathcal{E}(u)$

(c) Es sei $K = X$ und $\mathcal{E}$ auf X Frechet-differenzierbar (siehe Blatt 1 für die Definition) und es bezeichne $\mathcal{E}'(u) \in \mathcal{L}(X, \mathbb{R})$ die Frechet-Ableitung im Punkte $u \in X$. Zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind

1. $\mathcal{E}$ ist auf X konvex
2. Für alle $u, v \in X$ gilt $\mathcal{E}(u) \geq \mathcal{E}(v) + \mathcal{E}'(v)(u - v)$
3. Es gilt für $u, v \in X$ $(\mathcal{E}'(u) - \mathcal{E}'(v))(u - v) \geq 0$

(d) Zeige die in der vorlesung benutzte Ungleichung: Für $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt stets

$$\sqrt{1 + |x|^2} \geq \sqrt{1 + |y|^2} + \frac{\langle y, x - y \rangle}{\sqrt{1 + |y|^2}}. \tag{18}$$

(e) Es sei $v \in X$. Wir sagen, die Hesse-Abbildung von v existiert, falls es eine bilineare Abbildung $H_{\mathcal{E}}(v) : X \times X \to \mathbb{R}$ gibt sodass

$$H_{\mathcal{E}}(v)(x, y) = \lim_{t \to 0} \frac{\mathcal{E}'(v + tx)(y) - \mathcal{E}'(v)(y)}{t} \tag{19}$$

Zeige, falls $\mathcal{E}$ konvex ist, so ist $H_{\mathcal{E}}(v)(x, x) \geq 0$ für alle $x \in X$

(f) BONUS: Zeige: Existiert für alle $x \in X$

$$\lim_{t \to 0} \left\| \frac{\mathcal{E}'(v + tx) - \mathcal{E}'(v)}{t} \right\|_{X^*} \tag{20}$$

und ist für jedes $y \in X$ die Abbildung

$$X \ni x \mapsto H_{\mathcal{E}}(x, y) \in \mathbb{R} \tag{21}$$

auch stetig, so ist $H_{\mathcal{E}}(v)(x, y)$ auch eine stetige Bilinearform, das heißt es gibt $A > 0$ sodass

$$|H_{\mathcal{E}}(v)(x, y)| \leq A ||x||_X ||y||_X \tag{22}$$

(g) BONUS: Angenommen, die Abbildung

$$\mathbb{R}^2 \ni (t, h) \mapsto \mathcal{E}(v + tx + hy) - \mathcal{E}(v + tx) - \mathcal{E}(v + hy) + \mathcal{E}(v) \in \mathbb{R} \tag{23}$$

ist in einer Umgebung der Null zweimal stetig differenzierbar. Zeige, dass $H_{\mathcal{E}}(v)$ eine symmetrische Bilinearform bildet.

(h) BONUS: Es sei X reflexiv aber kein Präilbertraum und $\mathcal{E} : X \to \mathbb{R}$ strikt konvex, koerziv und schwach unterhalbstetig und so, dass die Bedingungen aus Teilaufgabe (e) und (f) erfüllt sind. Es sei u das eindeutige Minimum von $\mathcal{E}$ auf X. Dann ist $H_{\mathcal{E}}(u)$ nicht positiv definit.