Universität Ulm

Abgabe: Donnerstag, 9.11.2017

Prof. Dr.Anna Dall'Acqua
Marius Müller
Wintersemester 2017/18
Punktzahl: keine

Übungen Variationsrechnung: Blatt 2

5. (Sobolevräume, Lipschitzstetigkeit und Approximation)

Für diese Aufgabe sei $1 \leq p < \infty$. Sei außerdem $(\phi_\epsilon)_{\epsilon>0}$ eine Familie mit Standard-Mollifiern. Wir wollen in dieser Aufgabe benutzen, dass für jedes $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen gilt, dass $\overline{C_0^\infty(\Omega)}^{||\cdot||_{L^p(\Omega)}} = L^p(\Omega)$. Das liegt daran, dass für $u \in L^p(\Omega)$ $(u * \phi_\epsilon)_{\epsilon>0}$ in $L^p(\Omega)$ gegen u konvergiert.

(a) Zeige: Es sei $q > 1$ so, dass $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ und $q = \infty$ im Falle von $p = 1$. Sei $u \in L^q(\Omega)$. Zeige: Gibt es ein $C > 0$ so, dass für alle $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ gilt

$$\left| \int u \partial_{x_j} \phi dx \right| \leq C ||\phi||_{L^p(\Omega)} \quad \forall j = 1, ..., n \tag{1}$$

so gilt, dass $u \in W^{1,q}(\Omega)$.

(b) Zeige, dass jede auf $\mathbb{R}$ Lipschitzstetige Funktion in eine schwache Ableitung hat, die in $L^\infty(\mathbb{R})$ liegt.

(c) Es gelte (1) für $p = \infty$. Was kann man über u sagen ?

(d) Lässt sich (b) auf $\mathbb{R}^n$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen verallgemeinern ?

(e) Es sei $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Zeige (oder kontrolliere, ob du es weisst),

- $u * \phi_\epsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ und $\partial_{x_i}(u * \phi_\epsilon) = (D_{x_i} u) * \phi_\epsilon$.
- $||u * \phi_\epsilon||_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq ||u||_{L^p(\mathbb{R}^n)}$
- Gilt auch $||u * \phi_\epsilon||_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq ||u||_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}$?
- $||u * \phi_\epsilon - u||_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \to 0$ für $\epsilon \to 0$.
- Was geht schief, wenn man sich auf einer allgemeinen offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ befindet?

(f) Lies dir folgendes Resultat durch:
Satz: Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und C^2-glatt berandet. Dann gibt es einen stetigen linearen Operator $i : W^{1,p}(\Omega) \to W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, der erfüllt: Für $u \in W^{1,p}(\Omega)$ gilt stets $i(u)_{|\Omega} = u$ fast überall in Ω.

(g) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und C^2-glatt berandet und es sei $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Dann gilt $(i(u) * \phi_\epsilon)\,|_\Omega \to u$ in $W^{1,p}(\Omega)$.

(h) BONUS: Es sei C die Cantormenge und (C_n) die Menge im n- ten Schritt der Konstruktion dieser. Definiere

$$F_n(x) := \frac{\lambda([0, x] \cap C_n)}{\lambda(C_n)} \quad x \in [0, 1] \tag{2}$$

wobei λ das eindimensionale Lebesgue-Maß bezeichnet. Es kann ohne Beweis vorausgesetzt werden, dass F_n auf $[0, 1]$ gleichmäßig gegen eine Funktion $F \in C[0, 1]$ konvergiert, siehe `https://en.wikipedia.org/wiki/Cantor_function`. Zeige, dass $F \in W^{1,\infty}((0, 1) \setminus C)$.

(i) BONUS: Zeige, dass F keine Fortsetzung auf $W^{1,p}(0, 1)$ besitzen kann.

6. (Perimeter und Minimalflächen)
Definition: Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Eine Lebesgue-messbare Menge $E \subset \mathbb{R}^n$ hat endlichen Perimeter in Ω, wenn

$$\mathcal{P}(E, \Omega) = \int_\Omega |D\chi_E| := \sup_{\phi \in C_0^1(\Omega), ||\phi||_\infty \leq 1} \int_\Omega \chi_E \operatorname{div}\phi \, dx < \infty \tag{3}$$

Im Folgenden bezeichne E stets eine Lebesgue-messbare Menge.

(a) Zeige $\mathcal{P}(\Omega, \Omega) = 0$.

(b) Zeige; Für $\Omega_1 \subset \Omega_2$ gilt stets $\mathcal{P}(E, \Omega_1) \leq \mathcal{P}(E, \Omega_2)$. Kann $<$ bereits gelten, wenn $\Omega_2 \setminus \Omega_1$ eine Lebesguesche Nullmenge ist ?

(c) Mache dich vertraut mit folgender

Definition: Eine messbare Menge $E \subset \mathbb{R}^n$ heißt Cappacioli-Menge, falls für jede beschänkte offene Menge Ω gilt, dass $\mathcal{P}(E,\Omega) < \infty$.
Zeige nun, dass es eine Cappacioli-Menge E gibt mit $\mathcal{P}(E,\mathbb{R}^n) = \infty$

(d) Zeige, dass stets gilt $\mathcal{P}(E,\Omega) = \mathcal{P}(\Omega \setminus E, \Omega)$.

(e) Zeige, dass für $E_1, E_2 \subset \mathbb{R}^n$ Lebesgue-messbar mit $\operatorname{dist}(E_1, E_2) > 0$ stets gilt

$$\mathcal{P}(E_1 \cup E_2, \Omega) = \mathcal{P}(E_1, \Omega) + \mathcal{P}(E_2, \Omega). \tag{4}$$

Gib ein Beispiel für disjunkte Mengen E_1, E_2 sodass '$<$' gilt.

(f) Es sei $(E_k)_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^n$ so, dass $E_k \subset E_{k+1}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k = E. \tag{5}$$

Zeige, dass $\mathcal{P}(E,\Omega) \leq \liminf_{k\to\infty} \mathcal{P}(E_k, \Omega)$. Finde ein Beispiel wo $'<'$ gilt.

(g) Betrachte das folgende Variationsproblem, das sogenannte Minimalflächenproblem: Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und und beschränkt und sei D eine Cacciopoli-Menge. Definiere

$$M := \{F \subset \mathbb{R}^n \text{ Lebesgue-messbar} |\ F \cap \Omega^C = D\} \tag{6}$$

Zeige: Es gibt eine Menge $E \in M$ sodass

$$\mathcal{P}(E,\mathbb{R}^n) = \inf_{F \in M} \mathcal{P}(F, \mathbb{R}^n) \tag{7}$$

(h) Gebe eine physikalische Interpretation dieses Problems für $\Omega = B_2(0) \times (0,1) \subset \mathbb{R}^3$ und $D = (B_1(0) \times \{0\}) \cup (B_1(0) \times \{1\})$.(Alle Bälle sind hier als Teilbälle von $\mathbb{R}^2$ aufzufassen).

7. (Approximation von BV-Funktionen)

(a) Zeige (einen Teil der) Dreiecksungleichung für die BV-Norm, d.h. zeige für $f, g \in BV(\Omega)$

$$\int_\Omega |D(f+g)| \leq \int_\Omega |Df| + \int_\Omega |Dg| \tag{8}$$

(b) Es sei $f \in BV(\mathbb{R}^n)$. Zeige

$$\int_{\mathbb{R}^n} |Df| = \lim_{\epsilon\to 0} \int_{\mathbb{R}^n} |Df * \phi_\epsilon| = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla(f * \phi_\epsilon)| dx \tag{9}$$

Kann das Resultat für allgemeine offene $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ gerettet werden?

(c) Zeige mithilfe der vorigen Teilaufgabe für Lebesgue-messbare und beschränkte Mengen $E_1, E_2 \subset \mathbb{R}^n$

$$\mathcal{P}(E_1 \cap E_2, \mathbb{R}^n) + \mathcal{P}(E_1 \cup E_2, \mathbb{R}^n) \leq \mathcal{P}(E_1, \mathbb{R}^n) + \mathcal{P}(E_2, \mathbb{R}^n) \tag{10}$$

(d) Vollende den Beweis von Satz 2.9

(i) Warum kann man m und D_1 so wählen wie sie in der Vorlesung gewählt wurden? Man verlangt, dass

$$\int_{D \setminus D_1} |Dv| < \epsilon. \tag{11}$$

(ii) Informiere dich in dem Infoblatt nochmals über die zerlegung der Eins und betrachte nochmals die Konstruktion der Funktionen (ζ_k). Beweise, dass für alle $x \in \Omega$ gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} \nabla \zeta_k(x) = 0 \tag{12}$$

(iii) Zeige, dass v_ϵ in $L^1(\Omega)$ gegen v konvergiert.

(iv) Unter Verwendung der Techniken in den Teilaufgaben (b) zeige, dass

$$\int_\Omega |Dv_\epsilon| = \int_\Omega |Dv| + o(\epsilon). \tag{13}$$

Ab hier wollen wir noch einige Aussagen beweisen, die wir in der Vorlesung verwendet haben.

(e) Es sei $E \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und C^2-glatt berandet. Wir wollen zeigen, dass es $\psi \in C_0^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ gibt so, dass $\psi(x) = \mu_E(x)$ auf ∂E.

(f) Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Zeige, dass es Funktionen $(\chi_\epsilon)_{\epsilon>0} \subset C_0^\infty(\Omega)$ gibt mit $0 \leq \chi_\epsilon \leq 1$ so, dass χ_ϵ punktweise und monoton gegen χ_Ω konvergiert. Für welche $p \in [1, \infty]$ konvergiert $\chi_\epsilon \to \chi_\Omega$ in $L^p(\Omega)$?

8. (Konvexität)

Es sei X ein Banachraum und $K \subset X$ konvex. Es heißt $\mathcal{E} : K \to \mathbb{R}$ aif K konvex falls

$$\forall u, v \in K, t \in (0,1) : \mathcal{E}(tu + (1-t)v) \leq t\mathcal{E}(u) + (1-t)\mathcal{E}(v) \tag{14}$$

Dazu heißt $\mathcal{E}$ strikt konvex, falls Gleichheit oben genau dann gilt, wenn $u = v$.

(a) Es sei X reflexiv, $K \subset X$ konvex abgeschlossen und $\mathcal{E} : K \to \mathbb{R}$ koerziv und schwach unterhalbstetig. Zeige, dann nimmt $\mathcal{E}$ auf K sein Infimum an, d.h es gibt ein $\mathcal{E}(v) = \inf_{u \in K} \mathcal{E}(u)$

(b) Seien K , $\mathcal{E}$ wie in (a). Zeige: Falls man zusätzlich vorraussetzt, dass $\mathcal{E}$ strikt konvex ist, so gibt es genau ein $v \in K$ sodass $\mathcal{E}(v) = \inf_{u \in K} \mathcal{E}(u)$

(c) Es sei $K = X$ und $\mathcal{E}$ auf X Frechet-differenzierbar (siehe Blatt 1 für die Definition) und es bezeichne $\mathcal{E}'(u) \in \mathcal{L}(X, \mathbb{R})$ die Frechet-Ableitung im Punkte $u \in X$. Zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind

1. $\mathcal{E}$ ist auf X konvex
2. Für alle $u, v \in X$ gilt $\mathcal{E}(u) \geq \mathcal{E}(v) + \mathcal{E}'(v)(u - v)$
3. Es gilt für $u, v \in X$ $(\mathcal{E}'(u) - \mathcal{E}'(v))(u - v) \geq 0$

(d) Zeige die in der vorlesung benutzte Ungleichung: Für $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt stets

$$\sqrt{1 + |x|^2} \geq \sqrt{1 + |y|^2} + \frac{\langle y, x - y \rangle}{\sqrt{1 + |y|^2}}. \tag{15}$$

(e) Es sei $v \in X$. Wir sagen, die Hesse-Abbildung von v existiert, falls es eine bilineare Abbildung $H_\mathcal{E}(v) : X \times X \to \mathbb{R}$ gibt sodass

$$H_\mathcal{E}(v)(x, y) = \lim_{t \to 0} \frac{\mathcal{E}'(v + tx)(y) - \mathcal{E}'(v)(y)}{t} \tag{16}$$

Zeige, falls $\mathcal{E}$ konvex ist, so ist $H_\mathcal{E}(v)(x, x) \geq 0$ für alle $x \in X$

(f) BONUS: Zeige: Existiert für alle $x \in X$

$$\lim_{t \to 0} \left\| \frac{\mathcal{E}'(v + tx) - \mathcal{E}'(v)}{t} \right\|_{X^*} \tag{17}$$

und ist für jedes $y \in X$ die Abbildung

$$X \ni x \mapsto H_\mathcal{E}(x, y) \in \mathbb{R} \tag{18}$$

auch stetig, so ist $H_\mathcal{E}(v)(x, y)$ auch eine stetige Bilinearform, das heißt es gibt $A > 0$ sodass

$$|H_\mathcal{E}(v)(x, y)| \leq A||x||_X ||y||_X \tag{19}$$

(g) BONUS: Angenommen, die Abbildung

$$\mathbb{R}^2 \ni (t, h) \mapsto \mathcal{E}(v + tx + hy) - \mathcal{E}(v + tx) - \mathcal{E}(v + hy) + \mathcal{E}(v) \in \mathbb{R} \tag{20}$$

ist in einer Umgebung der Null zweimal stetig differenzierbar. Zeige, dass $H_\mathcal{E}(v)$ eine symmetrische Bilinearform bildet.

(h) BONUS: Es sei X reflexiv aber kein Prähilbertraum und $\mathcal{E} : X \to \mathbb{R}$ strikt konvex, koerziv und schwach unterhalbstetig und so, dass die Bedingungen aus Teilaufgabe (e) und (f) erfüllt sind. Es sei u das eindeutige Minimum von $\mathcal{E}$ auf X. Dann ist $H_\mathcal{E}(u)$ nicht positiv definit.