

Variationsrechnung Blatt 10

A33) $(X_i; d_i)$ nicht leere metrische Räume $\forall i \in \mathbb{N}$.

Wähle $x_i^0 \in X_i$ beliebig und setze

$$X := \left\{ x \in \prod_{i=1}^{\infty} X_i \mid \sup_{i \in \mathbb{N}} d_i(x_i, x_i^0) < \infty \right\}$$

falls $x = (x_1, x_2, \dots)$

Definiere

$$d_X((x_1, x_2, \dots), (y_1, y_2, \dots))$$

$$:= \sup_{i \in \mathbb{N}} d_i(x_i, y_i)$$

Beh (X, d) ist ein metrischer Raum

1) d_X ist wohldefiniert, insbesondere $d_X(x, y) \in \mathbb{R} \quad \forall x, y \in X$

Bew:

$$d_X(x, y) = \sup_{i \in \mathbb{N}} d_i(x_i, y_i)$$

$$\leq \sup_{i \in \mathbb{N}} (d_i(x_i, x_i^0) + d_i(x_i^0, y_i))$$

$$\leq \sup_{i \in \mathbb{N}} d_i(x_i, x_i^0) + \sup_{j \in \mathbb{N}} d_j(x_j^0, y_j) < \infty$$

2) d_X ist positiv definit

$$d_X(x, y) \geq 0 \quad \forall x, y \in X \quad \text{klar}$$

$$\text{Nun } d_X(x, y) = 0 \implies d_i(x_i, y_i) = 0 \quad \forall i \in \mathbb{N}$$

$$\xRightarrow[\text{def}]{\text{d. pos.}} x_i = y_i \quad \forall i \in \mathbb{N} \implies x = y$$

3) d_X ist symmetrisch

$$d_X(x, y) = \sup_{i \in \mathbb{N}} d_i(x_i, y_i) = \sup_{i \in \mathbb{N}} d_i(y_i, x_i) = d_X(y, x)$$

4) d_X erfüllt die Dreiecksungleichung

Seien $x, y, z \in X$

$$d_X(x, z) = \sup_{i \in \mathbb{N}} d_i(x_i, z_i)$$

$$\leq \sup_{i \in \mathbb{N}} \left[\underbrace{d_i(x_i, y_i)}_{\leq d_X(x, y)} + \underbrace{d_i(y_i, z_i)}_{\leq d_X(y, z)} \right]$$

$$\leq d_X(x, y) + d_X(y, z)$$

Beh X enthält isometrische Kopien von X_i für

Setze für $j \in \mathbb{N}$

$$\varphi_j: X_j \longrightarrow X$$

$$\varphi_j(y) := (x_1^0, x_2^0, \dots, x_{j-1}^0, y, x_{j+1}^0, \dots)$$

Dann • φ_j ist injektiv denn seien $y, z \in X_j$

$$\varphi_j(y) = \varphi_j(z)$$

$\Rightarrow j$ -te Koordinate von $\varphi_j(y) = j$ -te Koordinate von $\varphi_j(z)$

$$\Rightarrow y = z$$

• φ_j ist isometrisch denn

$$d_X(\varphi_j(y), \varphi_j(z)) = \sup_{i \in \mathbb{N}} d_i((\varphi_j(y))_i, (\varphi_j(z))_i)$$

$$= \sup_{i \in \mathbb{N}} \begin{cases} 0 & i \neq j \\ d_j(y, z) & i = j \end{cases} = d_j(y, z)$$

(b) Die Konstruktion in A33(a) hat ein "Problem":

Wähle $X_i = \mathbb{R}$, $\forall i \in \mathbb{N}$. Dann: X_i separabel $\forall i \in \mathbb{N}$.

Die Konstruktion liefert (wenn man $x_i^0 = 0 \forall i \in \mathbb{N}$ setzt), $X \cong \ell^\infty(\mathbb{N}; \mathbb{R})$. Ein Raum, der nicht separabel ist.

Verbesserung

Sei X wie in A33 a und seien $(X_i, d_i)_{i \in \mathbb{N}}$ separable metrische Räume.

Setze

$$\tilde{X} := \left\{ x \in X \mid (d_i(x_i, x_i^0))_{i \in \mathbb{N}} \text{ ist eine abzählbare} \right.$$

Folge in $\mathbb{R}$, d.h.

$$\left. \exists N \in \mathbb{N} : d_i(x_i, x_i^0) = 0 \quad \forall i \geq N \right\}.$$

Die Metrik auf $\tilde{d}_X$ sei erklärt durch die Einschränkung der Metrik d_X auf $\tilde{X} \times \tilde{X}$.

Beachte: Für $i \in \mathbb{N}$ gilt

$$\varphi_i(X_i) \subset \tilde{X} \text{ für } \varphi_i \text{ wie in A33a}$$

Damit enthält $\tilde{X}$ auch eine isometrische Kopie
von $X_i \quad \forall i \in \mathbb{N}$

Z $\tilde{X}$ separabel.

Seien $\{y_k^i \mid k \in \mathbb{N}\}$ abzählbare dichte

Teilmenge von $X_i \quad \forall i \in \mathbb{N}$

Sei

$$Y := \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{(j_1, j_2, \dots, j_k) \in \mathbb{N}^k} \left\{ (y_{j_1}^1, y_{j_2}^2, y_{j_3}^3, \dots, y_{j_k}^k, x_{k+1}^0, x_{k+2}^0, \dots) \right\}$$

Dann Y ist abzählbar!

Beh Y ist dicht in $\tilde{X}$

Bew Sei $x \in \tilde{X}$ und $\varepsilon > 0$

$$\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : x_j = x_j^0 \quad \forall j \geq N.$$

Nun

$$\exists j_1 \in \mathbb{N} : d_1(y_{j_1}^1, x_1) < \varepsilon$$

$$\exists j_2 \in \mathbb{N} : d_2(y_{j_2}^2, x_2) < \varepsilon$$

$\vdots$

$$\exists j_{N-1} \in \mathbb{N} : d_{N-1}(y_{j_{N-1}}^{N-1}, x_{N-1}) < \varepsilon$$

Nun ist

$$a := (y_{j_1}^1, y_{j_2}^2, \dots, y_{j_{N-1}}^{N-1}, x_N^0, x_{N+1}^0, \dots) \in Y$$

und

$$d_{\tilde{X}}(x, a) = \max_{i=1, \dots, N-1} d_i(x_i, y_{j_i}^i) < \varepsilon$$

A341

Angenommen

$$T\text{-}\liminf_{j \rightarrow \infty} F_j(x) = T\text{-}\limsup_{j \rightarrow \infty} F_j(x)$$

Setze

$$F_\infty(x) := T\text{-}\liminf_{j \rightarrow \infty} F_j(x)$$

$$= \inf \left\{ \liminf_{j \rightarrow \infty} F_j(x_j) \mid x_j \rightarrow x \right\}$$

1) Liminf-inequality

$$x_j \rightarrow x$$

$$\Rightarrow F_\infty(x) \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} F_j(x_j)$$

direkt nach
Konstruktion

2) Limsup-Inequality

Da $F_\infty(x) = T\text{-}\limsup_{j \rightarrow \infty} F_j(x)$ gilt

$\forall k \in \mathbb{N} \exists x_j^k \xrightarrow{j \rightarrow \infty} x$ sodass

$$\limsup_{j \rightarrow \infty} F_j(x_j^k) \leq F_\infty(x) + \frac{1}{k}$$

OBdA $d(x_j^k, x) < \frac{1}{k} \quad \forall j \in \mathbb{N}$

[sonst verändere endlich viele Folgeglieder]

Nun $\exists (j_k)_{k \in \mathbb{N}} \uparrow \infty$:

$$j \geq j_k \Rightarrow F_j(x_j^k) \leq F_\infty(x) + \frac{2}{k}$$

denn Für alle $i \in \mathbb{N}$

$$\exists \tilde{j}_i > 0 : j \geq \tilde{j}_i \Rightarrow F_j(x_j^i) \leq F_\infty(x) + \frac{2}{i}$$

Setze $j_k := \max_{i=1, \dots, k} \tilde{j}_i + k$

Dann $j_k \uparrow$ und $j_k \rightarrow \infty$ und

$$j \geq j_k \Rightarrow j \geq \tilde{j}_k \Rightarrow F_j(x_j^k) \leq F_\infty(x) + \frac{2}{k}.$$

Sei nun $j \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \exists! k \in \mathbb{N} : j_k \leq j < j_{k+1}$$

Setze $y_j := x_j^k$ falls $j_k \leq j < j_{k+1}$

Beh $y_j \rightarrow x$ und

$$\limsup_{j \rightarrow \infty} F_j(y_j) \leq F_\infty(x)$$

Bew Für $j > j_k$ gilt

$$d(y_j, x) \leq \frac{1}{k} \Rightarrow y_j \rightarrow x.$$

Sei nun $\varepsilon > 0$. Wähle $N_\varepsilon := j_{\lceil 2/\varepsilon \rceil}$

Dann: Für $j \geq N_\varepsilon$

$$\begin{aligned} F_j(y_j) & \stackrel{\substack{k \geq \lceil 2/\varepsilon \rceil \\ j_k \leq j < j_{k+1}}}{\leq} F_j(x_j^k) \leq F_\infty(x) + \frac{2}{k} \\ & \leq F_\infty(x) + \frac{2}{\lceil 2/\varepsilon \rceil} \\ & \leq F_\infty(x) + \varepsilon \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \limsup_{j \rightarrow \infty} F_j(x_j) \leq F_\infty(x)$$

$\Rightarrow$ Beh.

Aufgabe 35

(a) Sei $x_j \xrightarrow{j \rightarrow \infty} x$.

Sei für alle $j \in \mathbb{N}$ $(x_k^j)_{k \in \mathbb{N}}$ eine
recovery sequence für x_j

$$\mathbb{Z} \quad F(x) \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} F(x_j)$$

Wir wissen:

$\forall j \in \mathbb{N} \exists k_j \in \mathbb{N}$ (oBdA $k_j < k_{j+1}$) sodass

$$\bullet d(x_{k_j}^j, x_j) \leq \frac{1}{j}$$

$$\bullet F_{k_j}(x_{k_j}^j) \leq F(x_j) + \frac{1}{j}$$

Setze für $l \in \mathbb{N}$

$$\tilde{x}_l = \begin{cases} x_{k_j}^j \\ x \end{cases}$$

$l = k_j$ für ein $j \in \mathbb{N}$
sonst.

Dann: $\tilde{x}_l \rightarrow x \quad (l \rightarrow \infty)$

und

$$\liminf_{j \rightarrow \infty} F(x_j) = \liminf_{j \rightarrow \infty} (F(x_j) + \frac{1}{j})$$

$$\geq \liminf_{j \rightarrow \infty} F_{K_j}(x_{K_j}^T) \geq \liminf_{j \rightarrow \infty} F_j(\tilde{x}_j)$$

$$\geq F(x)$$

da F die liminf-inequality erfüllt.

A35 b)

Sei $F_j \equiv F \quad \forall j \in \mathbb{N}$

Wir zeigen zunächst

(1) Konstantefolgen sind stets P -Konvergent.

Dazu sei $x_j^* \rightarrow x$ so, dass

$$\liminf_{j \rightarrow \infty} F(x_j^*) \leq P\text{-}\liminf_{j \rightarrow \infty} F + \varepsilon$$

Wähle nun eine Teilfolge $x_{j_k}^*$ so, dass

$$\lim_{k \rightarrow \infty} F(x_{j_k}^*) = \liminf_{j \rightarrow \infty} F(x_j^*)$$

Dann

$$P\text{-}\limsup_{j \rightarrow \infty} F \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} F(x_{j_k}^*)$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} F(x_{j_k}^*) = \liminf_{j \rightarrow \infty} F(x_j^*)$$

$$\leq P\text{-}\liminf_{j \rightarrow \infty} F + \varepsilon$$

$$\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} P\text{-}\limsup_{j \rightarrow \infty} F \leq P\text{-}\liminf_{j \rightarrow \infty} F$$

$\Rightarrow F_j \equiv F$ besitzt einen

$$T\text{-Limes } G := T\text{-}\lim_{j \rightarrow \infty} F.$$

Sei nun $\tilde{G}$ die unterhalbstetige Hülle von

F , d.h.

$$\tilde{G}(x) := \sup \{ H(x) \mid H \leq F \text{ unterhalbstetig} \}$$

Wir zeigen $G = \tilde{G}$

(i) $G \leq \tilde{G}$

A3Sa $\Rightarrow G$ unterhalbstetig

Nun $G \leq F$ denn sei $x_j = x \quad \forall j \in \mathbb{N}$

$$\text{Dann } G(x) \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} F(x_j) = F(x).$$

$$\Rightarrow G \leq F.$$

$$\Rightarrow G \leq \tilde{G}$$

(ii) $\tilde{G} \leq G$

Sei $H \in \mathcal{F}$ unterhalbstetig, $\mathbb{Z} \quad H \leq G$.

Sei $x \in X$ und $(x_j)_{j \in \mathbb{N}}$ eine Recovery Sequence
für G in x .

$$H(x) \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} H(x_j) \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} F(x_j)$$

$$\leq \limsup_{j \rightarrow \infty} F(x_j) \leq G(x)$$

$$\implies H \leq G$$

$$\begin{array}{l} \text{Supremum} \\ \implies \\ \text{über alle } H \end{array} \quad \tilde{G} \leq G$$

$$\text{Schließlich} \quad \tilde{G} = G.$$

ASS (c)

Beh

$$\lim_{j \rightarrow \infty} F_j(x) = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ -1 & x = 0 \end{cases} =: g(x)$$

Beweis

Liminf-inequality

Fall 1 $x \neq 0$

Sei $x_j \rightarrow x$

$$\text{Z} \quad \liminf_{j \rightarrow \infty} F_j(x_j) \geq 0.$$

Da $x_j \not\rightarrow 0$ gilt $|x_j| \rightarrow \infty$

$$\Rightarrow \exists j_0 \in \mathbb{N} : |x_j| \geq 2 \quad \forall j \geq j_0$$

$$\Rightarrow F_j(x_j) = F_1(jx_j) = 0 \quad \forall j \geq j_0$$

$$\Rightarrow \liminf_{j \rightarrow \infty} F_j(x_j) = 0 = g(x)$$

Fall 2 $x = 0$

$$\Rightarrow (x_j \rightarrow x \Rightarrow \liminf_{j \rightarrow \infty} F_j(x_j) \geq \inf_{x \in \mathbb{R}} F_j(x) = -1 = g(x))$$

Limsup - Inequality

Fall 1 $x = 0$

Setze $x_j = -\frac{1}{j} \rightarrow 0$

Dann

$$\limsup_{j \rightarrow \infty} F_j(x_j) = \limsup_{j \rightarrow \infty} F_j(-\frac{1}{j})$$

$$= \limsup_{j \rightarrow \infty} F_1(-1) = -1 \leq g(0)$$

Fall 2 $x \neq 0$

Setze $x_j := x \quad \forall j \in \mathbb{N}$

$$\limsup_{j \rightarrow \infty} F_j(x_j) = \limsup_{j \rightarrow \infty} F_1(jx) = 0$$

$$= 0 \quad \forall j : |jx| > 1 \\ \text{ie } |x| > \frac{1}{j}$$

$$\leq g(x) \Rightarrow \text{Beh.}$$

Aufgabe 36

Sei $t > 0$.

Sei (x_j) eine recovery sequence für $x \in X$ beliebig

$$\Rightarrow tx_j \rightarrow tx \quad \forall t > 0$$

$$\Rightarrow F(tx) \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} F_j(tx_j)$$

$$= \liminf_{j \rightarrow \infty} t^\alpha F_j(x_j)$$

$$\leq t^\alpha \limsup_{j \rightarrow \infty} F_j(x_j)$$

$$= t^\alpha F(x)$$

Nun gilt auch, da t, x beliebig waren

$$t^\alpha F(x) = t^\alpha F\left(\frac{1}{t}(tx)\right)$$

$$\leq t^\alpha \left(\frac{1}{t}\right)^\alpha F(tx) = F(tx)$$

$\Rightarrow$ Beh.,

A37/

Zu „ $g_n \in W^{1,2}(0,1) \quad \forall n \in \mathbb{N}$ “

Sei $\varphi \in C_0^\infty(0,1)$ und $n \in \mathbb{N}$ fix

$$\int_0^1 g_n(x) \varphi'(x) dx$$

$$= \sum_{i=1}^n \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} \left[f_n\left(\frac{i-1}{n}\right) + n\left(x - \frac{i-1}{n}\right) \left(f_n\left(\frac{i}{n}\right) - f_n\left(\frac{i-1}{n}\right) \right) \right] \varphi'(x) dx$$

$$= \sum_{i=1}^n \left\{ \left[\left(f_n\left(\frac{i-1}{n}\right) + n\left(x - \frac{i-1}{n}\right) \left(f_n\left(\frac{i}{n}\right) - f_n\left(\frac{i-1}{n}\right) \right) \right) \varphi(x) \right]_{x=\frac{i-1}{n}}^{x=\frac{i}{n}} - \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} n \left(f_n\left(\frac{i}{n}\right) - f_n\left(\frac{i-1}{n}\right) \right) \varphi(x) dx \right\}$$

$$= \sum_{i=1}^n \left(f_n\left(\frac{i}{n}\right) \varphi\left(\frac{i}{n}\right) - f_n\left(\frac{i-1}{n}\right) \varphi\left(\frac{i-1}{n}\right) \right) - \int_0^1 \sum_{i=1}^n \chi_{\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]}(x) n \left(f_n\left(\frac{i}{n}\right) - f_n\left(\frac{i-1}{n}\right) \right) \varphi(x) dx$$

$$= f_n(1) \varphi(1) - f_n(0) \varphi(0)$$

$$- \int_0^1 \sum_{i=1}^n \chi_{\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]}(x) n \left(f_n\left(\frac{i}{n}\right) - f_n\left(\frac{i-1}{n}\right) \right) \varphi(x) dx$$

$$= - \int_0^1 \sum_{i=1}^n \chi_{\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]}(x) n \left(f_n\left(\frac{i}{n}\right) - f_n\left(\frac{i-1}{n}\right) \right) \varphi(x) dx$$

$\Rightarrow g_n$ ist schwach differenzierbar mit

$$g_n'(x) = \sum_{i=1}^n \chi_{[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]}(x) \cdot n (f_n(\frac{i}{n}) - f_n(\frac{i-1}{n}))$$

$$\in L^\infty(Q_1) \subset L^2(Q_1)$$

Wir zeigen $g_n' \rightarrow 0$ schwach in L^2

Beweis: Sei $\varphi \in L^2(Q_1)$ $\sum \int_0^1 g_n' \varphi dx \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$)

$$\left| \int_0^1 g_n'(x) \varphi(x) dx \right| = \left| \sum_{i=1}^n n (f_n(\frac{i}{n}) - f_n(\frac{i-1}{n})) \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} \varphi(x) dx \right|$$

$$\leq \sum_{i=1}^n n \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} |f_n'(s)| ds \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} |\varphi(x)| dx$$

$$= \sum_{i=1}^n \sqrt{n} \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} |f_n'(s)| ds \sqrt{n} \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} |\varphi(x)| dx$$

$$\leq \sum_{i=1}^n \sqrt{n} \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} |f_n'(s)|^2 ds} \sqrt{n} \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} |\varphi(x)|^2 dx}$$

$$= \sum_{i=1}^n \sqrt{\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} |f_n'(s)|^2 ds} \sqrt{\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} |\varphi(x)|^2 dx}$$

Cauchy
Schwarz
für
Summen

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} |f'_n(s)|^2 ds} \sqrt{\sum_{i=1}^n \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} |\varphi(x)|^2 dx}$$

$$= \|f'_n\|_{L^2} \|\varphi\|_{L^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

A38/

(a)

Liminf inequality

Sei $x_j \rightarrow x$

$$(F+g)(x) = F(x) + g(x)$$

$$\leq \liminf_{j \rightarrow \infty} F_j(x_j) + \lim_{j \rightarrow \infty} g(x_j)$$

$$= \liminf_{j \rightarrow \infty} (F_j(x_j) + g(x_j))$$

$$= \liminf_{j \rightarrow \infty} (F_j + g)(x_j)$$

Existenz einer Recovery-Sequence

Sei $x \in X$.

Dann $\exists x_j \rightarrow x : F(x) = \lim_{j \rightarrow \infty} F_j(x_j)$

Nun

$$(F+g)(x) = \lim_{j \rightarrow \infty} F_j(x_j) + g(x_j)$$

A386

Falsch. Gegenbeispiel: $X = \mathbb{R}$

$$F_j(x) = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ -1 & x = 0 \end{cases} \quad \forall j \in \mathbb{N}$$

$$g_j(x) = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

$F_j + g_j$ ist T -Konvergent gegen $H_1 \equiv 0$.

Nun

F_j ist T Konvergent gegen

$$H_2(x) := \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ -1 & x = 0 \end{cases}$$

denn ~~unter~~ $H_2 \equiv F_j$ ist schwach unterhalb stetig

und F_j ist konstant, siehe A35a.

Außerdem: g_j ist T -konvergent gegen $H_3 \equiv 0$

laut Beispiel 1.7 (i)

ABER $0 \equiv H_1 \neq H_2 + H_3 = H_2 = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ -1 & x = 0 \end{cases}$

A391

Standard-Beispiel

$$X = \mathbb{R}, M = X = \mathbb{R}$$

$$F_j(x) = \begin{cases} 0 & x \neq j \\ -1 & x = j \end{cases}$$

Beh : F_j ist T' -Konvergent gegen $F_\infty \equiv 0$

Bew:

liminf inequality

$x_j \rightarrow x \Rightarrow (x_j)$ beschränkt

$\Rightarrow \exists j_0 \in \mathbb{N} : |x_j| < j \quad \forall j \geq j_0$

$\Rightarrow F_j(x_j) = 0 \quad \forall j \geq j_0$

$\Rightarrow \liminf_{j \rightarrow \infty} F_j(x_j) = 0$

limsup inequality

$$x_j \equiv x, \text{ dann } \limsup_{j \rightarrow \infty} F_j(x_j) = \limsup_{\substack{j \rightarrow \infty \\ j > |x|+1}} F_j(x) = 0$$

Nun

$$\inf_{\mathbb{R}} F_{\infty} = 0$$

aber

$$\liminf_{j \rightarrow \infty} \inf_{\mathbb{R}} F_j = -1$$

Anderes Beispiel

$$X = \mathbb{R} \quad \mathcal{U} = X = \mathbb{R}$$

$$F_j(x) = \frac{-x^2}{j}$$

F_j ist T -konvergent gegen $g \equiv 0$ denn $g \equiv 0$

ist unterhalbstetig und $\forall x \in \mathbb{R}$ gibt

es eine Umgebung von x derart, dass $F_j \rightarrow 0$

gleichmäßig auf $\mathcal{U}$.

Bsp 1.7 (ii) $\Rightarrow F_j$ ist T -konvergent gegen $g \equiv 0$.

$$\text{Nun } \inf_{\mathbb{R}} g = 0, \quad \liminf_{j \rightarrow \infty} \inf_{\mathbb{R}} F_j = -\infty$$

A39b)

$$X = \mathbb{R}$$

$$F_j(x) = \begin{cases} 0 & x \neq j \\ -1 & x = j \end{cases}$$

Aus A39a wissen wir

$$P\text{-}\lim_{j \rightarrow \infty} F_j = 0$$

aber $\bar{x}_j = j$ hat keine Konv TF.