Universität Ulm

Abgabe: Donnerstag, 25.01.2017

Prof. Dr.Anna Dall'Acqua
Marius Müller
Wintersemester 2017/18
Punktzahl: keine

Übungen Variationsrechnung: Blatt 10

Für dieses Übungsblatt bezeichne $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$. Wir verwenden auch die üblichen Konventionen für das Rechnen mit ∞, wie sie in eurer Maßtheorie-Vorlesung getroffen worden sind.

33. (Eine Lücke in der Theorie der Γ- Konvergenz?)

Seien $X_1, X_2, ...$ und X allesamt nichtleere metrische Räume. Wir sagen dass X eine isometrische Kopie von X_1 enthält, wenn es eine injektive Abbildung $\phi_1 : X_1 \to X$ gibt derart, dass $d_X(\phi_1(x), \phi_1(y)) = d_{X_1}(x, y)$ für alle $x, y \in X$.

Wir haben in der Vorlesung bemerkt, dass man Familien von Funktionalen $(F_j : X_j \to \overline{\mathbb{R}})_{j\in\mathbb{N}}$, die auf verschiedenen metrischen Räumen definiert sind, auch als auf einem größeren metrischen Raum erklärt betrachten kann, der dann aber eine isometrische Kopie von allen anderen enthalten muss. Wir wollen hier die Frage beantworten, ob es einen solchen metrischen Raum überhaupt immer gibt.

(a) Zeige, dass es zu jeder abzählbaren Folge von nichtleeren metrischen Räumen $X_1, X_2, X_3, ...$ einen metrischen Raum X gibt, der eine isometrische Kopie von allen X_i enthält.

(b) Sei nun $X_1, X_2, X_3, ...$ eine Familie von separablen nichtleeren metrischen Räumen. Gibt es jetzt stets auch einen separablen metrischen Raum X der eine isometrische Kopie von allen X_i enthält?

34. (Γ-Limes Inferior und Γ-Limes Superior)

Es sei X ein metrischer Raum und $F_j : X \to \overline{\mathbb{R}}$ eine Folge von Funktionalen. Definiere für $x \in X$

$$\Gamma - \liminf_{j\to\infty} F_j(x) := \inf\{\liminf_{j\to\infty} F_j(x_j) | x_j \to x\} \tag{1}$$

und

$$\Gamma - \limsup_{j\to\infty} F_j(x) := \inf\{\limsup_{j\to\infty} F_j(x_j) | x_j \to x\}. \tag{2}$$

Wir haben in Bemerkung 1.6 (iv) von §5.1 bereits gesehen, dass aus der Existenz von $\Gamma - \lim_{j\to\infty} F_j$ folgt, dass

$$\Gamma - \liminf_{j\to\infty} F_j = \Gamma - \limsup_{j\to\infty} F_j \tag{3}$$

Zeige nun die Umkehrung, d.h falls (F_j) eine Folge ist, für die (3) erfüllt ist, so existiert $\Gamma - \lim_{j\to\infty} F_j$.

35. (Unterhalbstetigkeit und Γ-Konvergenz)

(a) Zeige: Es sei X ein metrischer Raum und $F : X \to \overline{\mathbb{R}}$ derart, dass es eine Folge (F_j) existiert mit der Eigenschaft, dass $F = \Gamma - \lim_{j\to\infty} F_j$. Zeige: Dann ist F unterhalbstetig.

(b) Zeige: Es sei $F_j = F : X \to \overline{R}$ eine konstante Folge. Dann ist $(F_j)_{j\in\mathbb{N}}$ Γ-konvergent gegen

$$G(x) := \sup\{H(x) | H \leq F, \text{ H unterhalbstetig}\}, \tag{4}$$

Die sogenannte unterhalbstetige Hülle von F

(c) Wir haben in der Vorlesung gezeigt: Wenn $F_j : X \to \mathbb{R}$ gleichmäßig gegen $F : X \to \mathbb{R}$ konvergiert und F unterhalbstetig ist, so ist F_j auch Γ-konvergent gegen F. In dieser Aufgabe wollen wir zeigen, dass punktweise Konvergenz nicht reicht: Definiere für $X = \mathbb{R}$

$$F_1(t) := \begin{cases} 1 & t = 1 \\ -1 & t = -1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{5}$$

und $F_j(t) = F_1(jt)$ für $j \in \mathbb{N}$ und $t \in \mathbb{R}$. Berechne den Γ-Limes von F_j. Ist dieser unterhalbstetig? Was ist der punktweise Grenzwert von F_j ?

36. (Homogenität und Γ-Konvergenz)

Es sei X ein normierter Vektorraum und $F_j : X \to \overline{\mathbb{R}}$ eine gegen $F : X \to \overline{\mathbb{R}}$ Γ-konvergente Folge. Zusätzlich seien alle F_j positiv homogen vom Grade α, das heißt für alle $t > 0$ und $x \in X$ gilt

$$F_j(tx) = t^\alpha F_j(x), \tag{6}$$

Zeige, dass auch F homogen vom Grade α ist.

37. (Stückweise lineare Approximation von Sobolev-Funktionen)

Die Γ-Konvergenz eignet sich besonders gut, um Variationsprobleme mit "diskreten" Problemen zu approximieren. Bei der Durchführung solcher Approximationen ergeben sich stets neue konzeptuelle Fragen. Eine davon ist die Folgende:

(a) Es sei $(f_n) \subset W^{1,2}(0,1)$ eine Folge, die in $W^{1,2}(0,1)$ gegen 0 konvergiert. Definiere

$$g_n(x) := \sum_{i=1}^{n} \left[f_n(\frac{i-1}{n}) + n \left(x - \frac{i-1}{n} \right) \left(f_n(\frac{i}{n}) - f_n(\frac{i-1}{n}) \right) \right] \chi_{[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]}(x) \tag{7}$$

(Es ist kein Tippfehler, dass das n im Index und das n im Abstand der Unterteilung die gleichen sind!)

Zeige, dass $g_n \in W^{1,2}(0,1)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $g_n \rightharpoonup 0$ schwach in $W^{1,2}(0,1)$.

38. (Γ-Konvergenz und stetige Perturbationen)

(a) Es sei X ein metrischer Raum $F_j : X \to \overline{\mathbb{R}}$ Γ-konvergent gegen $F : X \to \overline{\mathbb{R}}$. Sei dazu $G : X \to \mathbb{R}$ stetig auf X. Zeige: Dann ist $F_j + G$ Γ-konvergent gegen $F + G$.

(b) Wahr oder falsch? Es sei X ein metrischer Raum $F_j, G_j : X \to \mathbb{R}$ und $F, G : X \to \mathbb{R}$ derart, dass

$$F = \Gamma - \lim_{n\to\infty} F_j, \qquad G = \Gamma - \lim_{n\to\infty} G_j. \tag{8}$$

Dann ist $F_j + G_j$ Γ-konvergent gegen $F + G$.

39. (Γ-Konvergenz und Minimierer)

(a) Gebe ein Beispiel für einen metrischen Raum X, eine Menge M und eine Folge $(F_j : X \to \overline{\mathbb{R}})$, die gegen eine Funktion $F_\infty : X \to \overline{\mathbb{R}}$ Γ-konvergent ist und es gilt

$$\inf_M F_\infty > \liminf_{j\to\infty} \inf_M F_j \tag{9}$$

Anmerkung: Dies ist ein Beispiel dafür, dass die Kompaktheit in Proposition 1.9(i) entscheidend ist.

(b) Gebe ein Beispiel einer Γ-konvergenten Folge F_j mit folgenden Eigenschaften:

- Für jedes $j \in \mathbb{N}$ besitzt F_j einen eindeutigen Minimierer $\overline{x}_j$
- $\overline{x}_j$ hat keine konvergente Teilfolge.