Variationsrechnung

Blatt 11

Aufgabe 40

(a)

'$\Longrightarrow$' $\chi_{(a,b)} \in L^1(0,1) \quad \forall\ (a,b) \subset (0,1)$

und schwach*-konvergente Folgen ~~ist~~ sind beschränkt

nach dem Satz von Banach-Steinhaus

'$\Longleftarrow$' Sei

$$D := \{E \in \mathcal{B}(0,1) \mid \int_0^1 f_n \chi_E \, dx \longrightarrow \int_0^1 f \chi_E \, dx,\ n \to \infty\}$$

Bew D ist ein Dynkin-System auf $(0,1)$ d.h.

(i) $(0,1) \in D$

(ii) $A, B \in D \quad A \subset B \Longrightarrow B \setminus A \in D$

(iii) $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ paarweise disjunkt, $A_i \in D$

$\forall i \in \mathbb{N} \Longrightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in D.$

(i) gilt nach Vorraussetzung

(ii) Seien $A, B \in \mathcal{D}$ und $A \subset B$

Z $B \setminus A \in \mathcal{D}$

$$\int_0^1 f_n \chi_{B\setminus A}\, dx = \int_0^1 f_n (\chi_B - \chi_A)\, dx$$

$$= \int_0^1 f_n \chi_B\, dx - \int_0^1 f_n \chi_A\, dx$$

$$\xrightarrow{n\to\infty} \int_0^1 f \chi_B\, dx - \int_0^1 f \chi_A\, dx$$

$$= \int_0^1 f \chi_{B\setminus A}\, dx$$

(iii) Seien $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ paarweise disjunkt, $A_i \in \mathcal{D}$ $\forall i \in \mathbb{N}$.

Z $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{D}$.

$$(***) \int_0^1 f_n \chi_{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i}\, dx = \int_0^1 \sum_{i=1}^{\infty} f_n \chi_{A_i}\, dx$$

$$= \int_0^1 \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} f_n \chi_{A_i}\, dx$$

Nun

$$\sum_{i=1}^{N} |f_n| \chi_{A_i} \leq |f_n| \chi_{\bigcup_{i=1}^{N} A_i} \leq |f_n|$$

$$\xrightarrow[\text{dominierte Konvergenz}]{\text{Lebesgue}} \int_0^1 f_n \chi_{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i}\, dx = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \int_0^1 f_n \chi_{A_i}\, dx$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^1 f_n \chi_{A_i'} \, dx$$

Beachte nun dass

$$\sum_{i=1}^{\infty} \int_0^1 f_n \chi_{A_i'} \, dx$$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ absolut

konvergent ist denn

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left| \int_0^1 f_n \chi_{A_i'} \right| \leq \|f_n\|_\infty \sum_{i=1}^{\infty} |A_i'| = \|f_n\|_\infty \underbrace{\left| \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i' \right|}_{\leq 1}$$

$$\leq \|f_n\|_\infty .$$

Daher

$$\sum_{i=1}^{\infty} \int_0^1 f_n \chi_{A_i'} \, dx = \int_{\mathbb{N}} \underbrace{\left(\int_0^1 f_n \chi_{A_i'} \, dx \right)}_{\longrightarrow \int_0^1 f \chi_{A_i'} \, dx} \underbrace{d\mathcal{H}^0(i)}_{\text{Zählmaß}}$$

da $A_i' \in \mathcal{D}$.

Nun

$$\left| \int_0^1 f_n \chi_{A_i'} \, dx \right| \leq \|f_n\|_\infty \, |A_i'| \leq \sup_{m \in \mathbb{N}} \|f_m\|_\infty \, |A_i'|$$

und $$\int_{\mathbb{N}} \sup_{m \in \mathbb{N}} \|f_m\|_\infty \, |A_i'| \, d\mathcal{H}^0(i) = \sum_{i=1}^{\infty} \sup_{m \in \mathbb{N}} \|f_m\| \, |A_i'|$$

$$\leq \sup_{m \in \mathbb{N}} \|f_m\| \left| \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i' \right|$$

$\leq \sup_{m \in \mathbb{N}} \|f_m\|_\infty$

$\Longrightarrow \left(\int_0^1 f_n \chi_{A_i} \, dx \right)_{n \in \mathbb{N}}$ hat eine

$\mathcal{L}^1(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mathcal{H}^0)$ - Majorante

$$\xrightarrow{\text{Lebesgue}}$$

$$\int_{\mathbb{N}} \int_0^1 f_n \chi_{A_i} \, dx \; d\mathcal{H}^0(i)$$

$$\xrightarrow{n \to \infty} \int_{\mathbb{N}} \left(\int_0^1 f \chi_{A_i} \, dx \right) \; d\mathcal{H}^0(i)$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^1 f \chi_{A_i} \, dx \; \underset{\text{wie in (***)}}{\overset{\text{gleiche Argumentation}}{=\!=\!=\!=}} \int_0^1 f \chi_{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i} \, dx$$

$\Longrightarrow$

$$\int_0^1 f_n \chi_{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i} \, dx \xrightarrow{n \to \infty} \int f \chi_{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i} \, dx$$

Nun:

$\mathcal{D}$ ist ein Dynkin-System und $\mathcal{D}$ enthält

$\{(a,b) \mid 0 < a < b < 1\}$, ein schnittstabiles

Erzeugendensystem von $\mathcal{B}(0,1)$

$$\xRightarrow[\text{Dynkin}]{\text{Satz von}} \mathcal{D} = \mathcal{B}(0,1)$$

Nun, Beh: $\forall E \subset \mathbb{R}^n$ Lebesgue-Messbar

$$\int_0^1 f_n \chi_E \, dx \longrightarrow \int_0^1 f \chi_E \, dx$$

Beweis:

$$\lambda(E) = \sup_{\substack{K \subset E \\ \text{kompakt}}} \{\lambda(K)\} \qquad (\lambda \text{ Lebesgue-Maß})$$

$\Rightarrow \exists (K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sodass $K_n \subset E$ $\lambda(K_n) \uparrow \lambda(E)$

$K := \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$. Dann $K \subset E$ und $K \in \mathcal{B}(0,1)$ und

$\lambda(K) \geq \lambda(K_n) \; \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \lambda(K) \geq \lambda(E) \implies \lambda(K) = \lambda(E)$

$$\xRightarrow{K \text{ Lebesgue messbar}} \lambda(E \setminus K) = 0$$

$$\int_0^1 f_n \chi_E \, dx$$

$$= \underbrace{\int_0^1 f_n \chi_{E\setminus K} \, dx}_{=0 \ \forall n \in \mathbb{N}} + \underbrace{\int_0^1 f_n \chi_K \, dx}_{\to \int_0^1 f \chi_K \, dx \ \text{da} \ K \in \mathcal{B}(0,1)}$$

$$\xrightarrow{n \to \infty} \int f \chi_K \, dx = \int f \chi_E \, dx - \underbrace{\int f \chi_{E\setminus K} \, dx}_{=0}$$

$$= \int f \chi_E \, dx$$

$\Rightarrow$ Bew.

$\Rightarrow$ Für jede Treppenfunktion φ, die Lebesgue messbar ist gilt

$$\int_0^1 f_n \varphi \, dx \longrightarrow \int_0^1 f \varphi \, dx$$

<u>Nun:</u>

Sei $v \in L^1([0,1])$, $\varepsilon > 0$

$\Longrightarrow \exists$ Treppenfunktion $\varphi \in L^1([0,1])$ sodass

$\|v - \varphi\|_{L^1} < \varepsilon.$

(wir finden φ_n Treppenfunktionen $|\varphi_n| \leq v$ und $\varphi_n \longrightarrow v$ punktweise. Nach dem Satz von Lebesgue konvergieren diese dann auch in $L^1([0,1])$)

$$\left| \int f_n v \, dx - \int f v \, dx \right|$$

$$\leq \underbrace{\left| \int f_n \varphi \, dx - \int f \varphi \, dx \right|}_{\to 0 \ (n \to \infty)}$$

$$+ \|f_n\|_\infty \|\varphi - v\|_{L^1} + \|f\|_\infty \|\varphi - v\|_{L^1}$$

$$\Longrightarrow \limsup_{n \to \infty} \left| \int f_n v \, dx - \int f v \, dx \right|$$

$$\leq \left(\sup_{n \in \mathbb{N}} \|f_n\|_\infty + \|f\|_\infty \right) \varepsilon$$

$\varepsilon \longrightarrow 0^+ \Longrightarrow$ Beh.

(b)

Zunächst $u_\varepsilon \xrightarrow{*} \bar{u}$ in $L^\infty(0,1)$

Sei $u \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R})$ 1-periodisch, d.h. $u(x+1) = u(x)$

Setze $u_\varepsilon(t) := u\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)$

Beweis

(i) $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ ist beschränkt in $L^\infty(0,1)$

denn

$u \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R})$ + u 1-periodisch

$\Longrightarrow u \in L^\infty(\mathbb{R})$ da $\|u\|_\infty = \|u|_{[0,1]}\|_{\infty \text{ in } [0,1]}$

Damit

$\|u_\varepsilon\|_{\infty,(0,1)} \leq \|u\|_{\infty,\mathbb{R}} < \infty$ ~~dann~~

~~$\|u_\varepsilon\|_\infty$~~

Sei nun $(a,b) \subset (0,1)$

$$\int_0^1 u_\varepsilon \chi_{(a,b)}\,dx = \int_a^b u_\varepsilon(x)\,dx$$

$$= \int_a^b u\left(\tfrac{x}{\varepsilon}\right)dx = \varepsilon \int_{a/\varepsilon}^{b/\varepsilon} u(s)\,ds$$

$$= \varepsilon\left(\int_{a/\varepsilon}^{\lceil a/\varepsilon\rceil} u(s)\,ds + \sum_{k=\lceil a/\varepsilon\rceil}^{\lfloor b/\varepsilon\rfloor} \int_k^{k+1} u(s)\,ds + \int_{\lfloor b/\varepsilon\rfloor}^{b/\varepsilon} u(s)\,ds\right)$$

$$= \underbrace{\varepsilon \int_{\frac{a}{\varepsilon}}^{\lceil \frac{a}{\varepsilon}\rceil} u(s)\,ds}_{\substack{\le \|u\|_\infty \varepsilon\left(\lceil \frac{a}{\varepsilon}\rceil - a/\varepsilon\right) \\ \le \|u\|_\infty \varepsilon \to 0 \ (\varepsilon\to 0)}} + \underbrace{\varepsilon\left(\lfloor \tfrac{b}{\varepsilon}\rfloor - \lceil \tfrac{a}{\varepsilon}\rceil\right)}_{\to b-a} \int_0^1 u(s)\,ds + \underbrace{\varepsilon \int_{\lfloor \frac{b}{\varepsilon}\rfloor}^{b/\varepsilon} u(s)\,ds}_{\to 0}$$

denn
$$\varepsilon \lfloor \tfrac{b}{\varepsilon}\rfloor = \underbrace{\varepsilon\left(\tfrac{b}{\lfloor\varepsilon\rfloor} - \tfrac{b}{\varepsilon}\right)}_{|\,|<\varepsilon} + b$$

$$\longrightarrow (b-a)\int_0^1 u(s)\,ds = (b-a)\,\bar{u} = \int_0^1 \bar{u}\,\chi_{(a,b)}\,ds$$

qed.

$\text{A40 (a)} \Longrightarrow$ Beh.

Sei nun $1 \le p < \infty$ und $u \in L^p_{loc}(\mathbb{R})$

z.z.

$$u_\varepsilon \longrightarrow \overline{u} \text{ in } L^p(q_1).$$

Sei $v \in L^p(q_1)$. Setze

$$v^M := \begin{cases} M & v > M \\ v(x) & -M \le v(x) \le M \\ -M & v < -M \end{cases}$$

<u>Dann:</u> $v^M \in L^\infty(q_1)$

- $$\|v^M - v\|^p_{L^p(q_1)} = \int_{|v|>M} |M - |v||^p \, dx$$

$$\le \int_{|v|>M} |v|^p \, dx \xrightarrow[\text{Lebesgue}]{M \to \infty} 0$$

- $$\|v^M_\varepsilon - v_\varepsilon\|^p_{L^p(q_1)} \le \int_{|v_\varepsilon|>M} |v_\varepsilon|^p \, dx$$

$$= \int_{\{x \mid |v(\frac{x}{\varepsilon})| > M\}} |v(\tfrac{x}{\varepsilon})|^p \, dx$$

$$= \varepsilon \int_{\{x \in (q_1) \mid |v(\frac{x}{\varepsilon})| > M\}} \frac{1}{\varepsilon} |v(\tfrac{x}{\varepsilon})|^p \, dx$$

$$\Rightarrow \varepsilon \int_{\substack{\in(0,\varepsilon)\\ \{u \mid |v(u)|>M\}}} |v(u)|^p \, du \leq \int_{|v|>M} |v|^p \, dx + o(\varepsilon)$$

$$\xrightarrow[\text{Lebesgue}]{M\to\infty} 0 + o(\varepsilon)$$

Nun sei $w \in L^q(0,1)$ $\quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$$\left|\int_0^1 u_\varepsilon w \, dx - \int_0^1 uw \, dx\right|$$

$$= \left|\int_0^1 (u_\varepsilon - u^M_\varepsilon) \, w \, dx\right|$$

$$+ \left|\int_0^1 (u - u^M) \, w \, dx\right|$$

$$+ \underbrace{\left|\int_0^1 (u^M_\varepsilon - u^M) \, w \, dx\right|}$$

$\to 0$ für $\varepsilon \to 0$ denn $w \in L^1(0,1)$ und $u^M_\varepsilon \xrightarrow{*} u^M$ in $L^1(0,1)^* = L^\infty(0,1)$

$$\Rightarrow \left|\int_0^1 u_\varepsilon w \, dx - \int_0^1 uw \, dx\right|$$

$$\leq \left(\int_0^1 |w|^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \left(\|u_\varepsilon - u^M_\varepsilon\|_{L^p} + \|u - u^M\|_{L^p}\right)$$

$$+ o(\varepsilon)$$

$$\leq o(\varepsilon) + \|w\|_{L^q} \left(\mathfrak{R} \left(\int_{|u|>M} |u|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} + o(\varepsilon) \right)$$

$$\longrightarrow 0 \quad (\varepsilon \to 0)$$

A4 1)

(a) $T_\lambda f(x) = \inf_{y\in\mathbb{R}} f(y) + \lambda |y-x|$

$$\underset{y=x}{\leq} f(x) + \lambda |x-x| = f(x)$$

(b) $\lambda_1 < \lambda_2$. Sei $x\in\mathbb{R}$

$$f(y) + \lambda_1 |y-x| \leq f(y) + \lambda_2 |y-x|$$

$$\forall y \in \mathbb{R}$$

$$\Longrightarrow T_{\lambda_1} f(x) \leq T_{\lambda_2} f(x)$$

(c) Sei $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge derart, dass

$$f(y_n) + \lambda |y_n - y| \longrightarrow T_\lambda f(y)$$

Dann $T_\lambda f(x) - T_\lambda f(y)$

$$= \lim_{n\to\infty} T_\lambda f(x) - f(y_n) - \lambda |y_n - y|$$

$$\leq \liminf_{n\to\infty} \Big(f(y_n) + \lambda |y_n - x| - f(y_n) - \lambda |y_n - y| \Big)$$

$$= \liminf_{n\to\infty} \lambda \Big(\underbrace{|y_n - x|}_{\leq |y_n - y| + |y - x|} - |y_n - y| \Big)$$

$$\leq \lambda |y - x|$$

Analog:

$$T_\lambda f(y) - T_\lambda f(x) \leq \lambda |x - y|$$

$$\Longrightarrow |T_\lambda f(y) - T_\lambda f(x)| \leq \lambda |y - x|$$

(d) Sei f unterhalbstetig

Wähle für $\lambda > 0$ ein $x_\lambda \in \mathbb{R}$ sodass

$$T_\lambda f(x) \geq f(x_\lambda) + \lambda |x_\lambda - x| - \frac{1}{\lambda}$$

Nun

$$f(x_\lambda) \leq T_\lambda f(x) + \frac{1}{\lambda} \leq f(x) + \frac{1}{\lambda}$$

$$\Longrightarrow \quad (f(x_\lambda))_{\lambda > 1} \text{ beschränkt}$$

Nun

$$\lambda |x_\lambda - x| \leq T_\lambda f(x) - f(x_\lambda) + \frac{1}{\lambda} \leq f(x) - f(x_\lambda) + \frac{1}{\lambda}$$

$$\Longrightarrow \quad |x_\lambda - x| \leq \frac{1}{\lambda} \Big(f(x) - \underbrace{f(x_\lambda)}_{\text{beschr}} + \underbrace{\frac{1}{\lambda}}_{\text{beschr}} \Big)$$

$$\underset{\to 0}{}$$

$$\longrightarrow 0 \quad (\lambda \to \infty)$$

$$\Longrightarrow \quad x_\lambda \longrightarrow x$$

Nun

$$T_\lambda f(x) = \lim_{\lambda \to \infty} f(x_\lambda) + \lambda |x_\lambda - x|$$

aber auch

$$T_\lambda f(x) \leq f(x) \overset{\text{uhsstetigkeit}}{\leq} \liminf_{\lambda \to \infty} f(x_\lambda)$$

$$\leq \liminf_{\lambda \to \infty} \left(f(x_\lambda) + \lambda |x_\lambda - x| \right)$$

$$\leq T_\lambda f(x)$$

$\Longrightarrow$ Alles sind Gleichheiten:

$$T_\lambda f(x) = f(x)$$

Angenommen nun, dass

$T_\lambda f \longrightarrow f$ punktweise d.h
$f(x) = \sup_{\lambda > 0} T_\lambda f(x)$

Nun: $\forall \lambda > 0$ $T_\lambda f$ unterhalbstetig
da Lipschitz

Dann $f = \sup_{\lambda > 0} T_\lambda f$ ist unterhalbstetig
als Supremum unterhalbstetiger
Funktionen.

A4 e)

Es sei f konvex

z.z. $T_\lambda f$ konvex. Seien $x, z \in \mathbb{R}$

Bsp. $T_\lambda f(x) = \lim_{n\to\infty} f(y_n) + \lambda |y_n - x|$

$T_\lambda f(z) = \lim_{n\to\infty} f(w_n) + \lambda |w_n - z|$

$\Longrightarrow \mu T_\lambda f(x) + (1-\mu) T_\lambda f(z)$

$= \lim_{n\to\infty} \mu f(y_n) + (1-\mu) f(w_n)$

$+ \lambda \left(\mu |y_n - x| + (1-\mu) |w_n - z| \right)$

Δ-Ugl.

$\geq_{\text{konv.}} \liminf_{n\to\infty} f(\mu y_n + (1-\mu) w_n)$

$+ \lambda \left(\underbrace{|\mu (y_n - x) + (1-\mu)(w_n - z)|}_{= |\mu y_n + (1-\mu) w_n - (\mu x + (1-\mu) z)|} \right)$

$\geq \inf_{\xi \in \mathbb{R}} f(\xi) + \lambda |\xi - \mu x + (1-\mu) z|$

$= T_\lambda (\mu x + (1-\mu) z).$

42

(a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ beschränkt

$$\text{epi}(f) := \{(x,t) \mid f(x) \leq t\}$$

z.z. f unterhalbstetig

$\iff$ epi(f) abgeschlossen

'$\Rightarrow$' Sei $x_n \to x$, $t_n \to t$

und $(x_n, t_n) \subset \text{epi}(f)$

z.z. $(x,t) \in \text{epi}(f)$

Bew

$$f(x) \overset{\text{uhs}}{\leq} \liminf_{n\to\infty} f(x_n) \overset{(x_n,t_n)\in \text{epi}(f)}{\leq} \liminf_{n\to\infty} t_n = t$$

$\Rightarrow$ Beh

'$\Longleftarrow$'

Sei epi(f) abgeschlossen und

$x_n \longrightarrow x$

Nun $(x_n, f(x_n))_{n \in \mathbb{N}} \subset \text{epi}(f)$

$\overset{f \text{ beschränkt}}{\underset{\text{epi}(f) \text{ abgeschlossen}}{\Longrightarrow}} \quad \exists \text{ TF } x_{n_k} : \quad f(x_{n_k}) \longrightarrow \liminf_{n \to \infty} f(x_n)$

und daher

$$(x, \liminf_{n \to \infty} f(x_n)) \in \text{epi}(f)$$

$$\Longrightarrow f(x) \leq \liminf_{n \to \infty} f(x_n)$$

A42b)

Für $x \in \mathbb{R}$ setze

$$h(x) = \inf\{t \mid (x,t) \in \overline{epi(f)}\}$$

* Abgeschlossenheit von $\overline{epi(f)}$ $\quad \min\{t \mid (x,t) \in \overline{epi(f)}\}$

Behauptungen (1) h unterhalbstetig

(2) $h \leq f$

(3) $epi(h) = \overline{epi(f)}$

Beweis (1) h unterhalbstetig

Sei $x_n \longrightarrow x$. Dann $\quad (x_n, h(x_n)) \in \overline{epi(f)} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$\underset{\text{Abgeschlossenheit}}{\Longrightarrow} (x, \liminf_{n\to\infty} h(x_n)) \in \overline{epi(f)}$$

$$\Longrightarrow h(x) \leq \liminf_{n\to\infty} h(x_n)$$

(2) $h(x) \leq f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Denn

$$(x, f(x)) \in epi(f) \subset \overline{epi(f)}$$

$$\Longrightarrow h(x) \leq f(x).$$

(3)

Zunächst $\mathrm{epi}(h) \subset \overline{\mathrm{epi}(f)}$.

Seien $(x,t) \in \mathrm{epi}(h)$

$\Rightarrow h(x) \leq t$.

<u>Fall 1</u> $t = h(x)$

$\Rightarrow (x,t) \in \overline{\mathrm{epi}(f)}$ wegen $(*)$.

<u>Fall 2</u> $t > h(x)$

$\Rightarrow \exists s : h(x) < s < t$ sodass

$(x,s) \in \overline{\mathrm{epi}(f)}$

$\Rightarrow \exists ((x_n, s_n))_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathrm{epi}(f) : (x_n, s_n) \longrightarrow (x,s)$

Nun $s_n + t - s > s_n$, daher

$((x_n, s_n + t - s)) \subset \mathrm{epi}(f)$ und

$(x_n, s_n + t - s) \longrightarrow (x,t)$

$\Rightarrow (x,t) \in \overline{\mathrm{epi}(f)}$

$\Rightarrow (x,t) \in \overline{\mathrm{epi}(f)}$ in jedem Fall.

Zu „$\overline{epi(f)} \subset epi(h)$"

Seien $(x,t) \in \overline{epi(f)}$ $\Longrightarrow$ $h(x) \leq t$ da

h das Infimum aller t sodass $(x,t) \in \overline{epi(f)}$

$\Longrightarrow$ $(x,t) \in epi(h)$.

Also

$\overline{epi(f)} = epi(h)$ fur ein $h \leq f$ unterhalbstetig

Nach Z $h = sc^{-}(f)$

Sei dazu $g \leq f$ schwach unterhalb stetig

$\Longrightarrow$ $epi(g) \supset epi(f)$ und da nach

A42a $epi(g)$ abgeschlossen gilt

$epi(g) \supset \overline{epi(f)} = epi(h)$

$\Longrightarrow$ $g \leq h$ $\Longrightarrow$ $h = \sup\{g \mid g \leq f \text{ unterhalb stetig}\}$

$\Longrightarrow$ $h = sc^{-}(f)$

A43

$(\Omega, \mathcal{A})$ messbarer Raum

$f: \Omega \times \mathbb{R}^m \to [-\infty, \infty]$ eine $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ messbare Funktion.

z.z. Für jede $\mathcal{A}$-messbare Funktion

$u: \Omega \to \mathbb{R}^m$ ist

$g: \Omega \to \mathbb{R}$ $\quad g(x) := f(x, u(x))$

$\mathcal{A}$-messbar

Bew f $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ messbar

$$\Longrightarrow \exists \ \varphi_n = \sum_{k=1}^{N_n} \alpha_k^n \chi_{E_k^n} \qquad E_k^n \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^m) :$$

$\varphi_n \to f$. punktweise

Wir zeigen nun:

$\forall E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ gilt $\chi_E(\cdot, u(\cdot))$ $\mathcal{A}$-messbar.

Damit folgt dann $\underbrace{\varphi_n}_{(\cdot, u(\cdot))}$ messbar $\forall n \in \mathbb{N}$

und man hat :

g ~~f~~ messbar als punktweiser GW messbarer Funktionen.

Bew

Sei

$$\mathcal{D} := \{ E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^m) \mid \chi_E(\cdot, u(\cdot)) \ \mathcal{A}\text{-messbar} \}$$

Nun zeigen wir :

$\mathcal{D}$ Dynkin-System und $\mathcal{D} \supset \mathcal{A} \times \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$, welches ein schnittstabiles Erzeugendensystem von $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ ist.

Bew:

(i) $\Omega \times \mathbb{R}^m \in \mathcal{D}$ da $\chi_{\Omega \times \mathbb{R}^m}(\cdot, u(\cdot)) \equiv 1$ $\mathcal{A}$ messbar

(ii) $A, B \in \mathcal{D}$ $B \subset A$

Nun $\chi_{A \setminus B}(\cdot, u(\cdot)) = \chi_A(\cdot, u(\cdot)) - \chi_B(\cdot, u(\cdot))$

$\mathcal{A}$ messbar als Differenz

messbarer Fkt

(iii) $(A^i)_{i\in\mathbb{N}}$ pw disjunkt $\quad A_i \in \mathcal{D} \quad \forall i \in \mathbb{N}$

$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \qquad \text{z.} \quad A \in \mathcal{D}$$

Bew

$$\chi_A(\cdot, u(\cdot)) = \sum_{i=1}^{\infty} \underbrace{\chi_{A_i}(\cdot, u(\cdot))}_{A\text{-messbar}} \qquad A \text{ messbar.}$$

Nun sei $A \times B \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$

$$\chi_{A \times B}(\cdot, u(\cdot)) = \chi_A \cdot \chi_B \circ u$$

Nun $\chi_B \circ u$ messbar denn sei $C \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$(\chi_B \circ u)^{-1}(C) = u^{-1}(\underbrace{\chi_B^{-1}(C)}_{\in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)}) \in \mathcal{A}$$

$\Rightarrow \chi_{A \times B}(\cdot, u(\cdot))$ ist als Produkt $\mathcal{A}$-messbarer Fkt $\mathcal{A}$-messbar

A44)

(a) $f^*(u) = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left(ux - \frac{|x|^p}{p} \right)$

$h(x) := ux - \frac{|x|^p}{p}$

$p > 1$

$\Rightarrow \lim_{x \to \pm\infty} h(x) = -\infty$

$\leadsto 0 \overset{!}{=} h'(x) = u - |x|^{p-1} \operatorname{sgn} x$

$\Rightarrow$ Bei dem globalen Maximum x^* gilt

$u = |x^*|^{p-1} \operatorname{sgn} x^*$

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left(ux - \frac{|x|^p}{p} \right) = ux^* - \frac{|x^*|^p}{p}$$

$$= |x^*|^{p-1} \operatorname{sgn} x^* \, x^* - \frac{|x^*|^p}{p}$$

$$= |x^*|^p - \frac{|x^*|^p}{p} = \frac{1}{q} |x^*|^p$$

Nun

$|u| = \left| |x^*|^{p-1} \operatorname{sgn} x^* \right| = |x^*|^{p-1}$

$\Rightarrow \sup_{x \in \mathbb{R}} \left(ux - \frac{|x|^p}{p} \right) = \frac{1}{q} |u|^{\frac{p}{p-1}} = \frac{1}{q} |u|^q$

$$\Longrightarrow f^*(u) = \frac{|u|^q}{q}$$

(b) $f^*(u) = \sup_{x\in\mathbb{R}} (ux - e^x + 1)$

$= 1 + \sup_{x\in\mathbb{R}} (ux - e^x)$

Setze $h(x) := ux - e^x$

$\lim_{x\to\infty} h(x) = -\infty$

$\lim_{x\to -\infty} h(x) = -\infty \operatorname{sgn} u$

$\Longrightarrow f^*(u) = \infty$ falls $u<0$

Falls $u=0$

$f^*(u) = \sup_{x\in\mathbb{R}} (-e^x) + 1 = 1$

Falls $u>0$

$\lim_{x\to\pm\infty} h(x) = -\infty$

und $h'(x) = 0 \Rightarrow u = e^x$

$\Rightarrow x = \log(u)$

$\Rightarrow \sup_{x\in\mathbb{R}} h(x) = h(\log u) = u\log u - e^{\log u}$

$= u\log u - u$

$\Rightarrow f^*(u) = u\log u - u + 1$

$$f^*(u) = \begin{cases} \infty & u < 0 \\ 1 & u = 0 \\ u \log u - u + 1 & u > 0 \end{cases}$$

A44c)

$$f^*(u) \geq \langle x, u \rangle - f(x)$$

$$\overset{+f(x)}{\Longrightarrow} \langle x, u \rangle \leq f^*(u) + f(x)$$

A44d)

$f \leq g$

$$\Longrightarrow \langle x, u \rangle - f(x) \geq \langle x, u \rangle - g(x) \quad \forall x \in X$$
$$\forall u \in U$$

$$\Longrightarrow \sup_{x \in X} (\langle x, u \rangle - f(x)) \geq \sup_{x \in X} (\langle x, u \rangle - g(x)) \quad \forall u \in U$$

$$\Longrightarrow f^*(u) \geq g^*(u), \quad \forall u \in U.$$

A44e) $g(x) = f(\lambda x) \;\; \forall x \in X$ für ein $\lambda \neq 0$

$$\Longrightarrow g^*(u) = f^*\left(\frac{u}{\lambda}\right)$$

Bew $\sup_{x \in \cancel{X}} (\langle x, u \rangle - f(\lambda x)) = \sup_{x \in \cancel{X}} \left(\langle (\lambda x), \frac{u}{\lambda} \rangle - f(\lambda x)\right)$

$$\underset{z=\lambda x}{=} \sup_{z \in X} \left(\langle z, \tfrac{u}{\lambda} \rangle - f(z) \right) = f^*\left(\tfrac{u}{\lambda}\right)$$

<u>A44f)</u>

$$f^{**}(x) = \sup_{u \in U} \langle x, u \rangle - f^*(u)$$

$$= \sup_{u \in U} \langle x, u \rangle - \sup_{y \in X} \left(\langle y, u \rangle - f(y) \right)$$

$$= \sup_{u \in U} \inf_{y \in X} \langle x, u \rangle - \langle y, u \rangle + f(y)$$

$$= \sup_{u \in U} \underbrace{\inf_{y \in X} \langle x - y, u \rangle + f(y)}_{\leq f(x) \quad (\text{setze } y = x)}$$

$$\leq \sup_{u \in U} f(x) = f(x)$$

A44 (g) Seien $a, b \in \partial f(y)$ $\lambda \in (0,1)$

Sei $x \in X$

$f(y) + \langle x-y, \lambda a + (1-\lambda) b \rangle$

$= f(y) + \lambda \langle x-y, a \rangle + (1-\lambda) \langle x-y, b \rangle$

$= \lambda (f(y) + \langle x-y, a \rangle) + (1-\lambda) (f(y) + \langle x-y, b \rangle)$

$\leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(x) = f(x)$

$\Rightarrow \lambda a + (1-\lambda) b \in \partial f(y)$.

(h)

$f(x) \geq f(y) \quad \forall x \in X$

$\Rightarrow f(x) \geq f(y) + \langle x-y, 0 \rangle \quad \forall x \in X$

$\Rightarrow 0 \in \partial f(y)$

$\boxed{\text{A44i}}$

$$f^{**}(x) \overset{\text{siehe}}{\underset{\text{A44f}}{=}} \sup_{u \in U} \inf_{y \in X} \langle x-y, u \rangle + f(y)$$

Wähle nun $u^* \in \partial f(x)$

$$\geq \inf_{y \in X} f(y) + \langle x-y, u^* \rangle$$

$$\geq \inf_{y \in X} \left(f(x) + \langle y-x, u^* \rangle + \langle x-y, u^* \rangle \right)$$

$$= f(x)$$

$$\Rightarrow f^{**} \geq f$$

$\Longrightarrow$ Mit $\boxed{\text{A44f}}$ folgt $f^{**} = f$

<u>A44j)</u> OBdA $f(x) \neq -\infty \ \forall x$, sonst $f \equiv -\infty$.

Wir wissen $J := \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) < \infty\}$

ist ein Intervall.

$x_0 \notin J \Longrightarrow$ Jedes $~~z~~ u$ ist Subgradient von f in x_0

$x_0 \in \mathring{J}$ Wir zeigen:

Für $x_0 \in \mathring{J}$ existieren

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ in } \mathbb{R}$$

und

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

<u>Beweis</u> $x_1 > x_2 > x_0$ $\quad x_1, x_2 \in \mathring{J}$

Dann $$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \geq \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0}$$

denn $x_2 = \lambda x_0 + (1-\lambda) x_1$ für $\lambda = \frac{x_2 - x_1}{x_0 - x_1}$

$f(x_2) = f(\lambda x_0 + (1-\lambda) x_1)$ für $\lambda = \frac{x_2 - x_1}{x_0 - x_1}$

$\longrightarrow$

$$\Longrightarrow f(x_2) \leq \lambda f(x_0) + (1-\lambda) f(x_1).$$

$$= \frac{x_2 - x_1}{x_0 - x_1} f(x_0) + \left(1 - \frac{x_2 - x_1}{x_0 - x_1}\right) f(x_1)$$

$$= \frac{x_2 - x_1}{x_0 - x_1} f(x_0) + \frac{x_0 - x_2}{x_0 - x_1} f(x_1)$$

$$\Longrightarrow \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0} \leq \frac{\frac{x_2 - x_1}{x_0 - x_1} f(x_0) - f(x_0) + \frac{x_0 - x_2}{x_0 - x_1} f(x_1)}{x_2 - x_0}$$

$$= \frac{\left(\frac{x_2 - x_1}{x_0 - x_1} - 1\right) f(x_0) + \frac{x_0 - x_2}{x_0 - x_1} f(x_1)}{x_2 - x_0}$$

$$= \frac{\frac{(x_2 - x_0) f(x_0) + (x_0 - x_2) f(x_1)}{x_0 - x_1}}{x_2 - x_0}$$

$$= \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$\Longrightarrow \quad x \longmapsto \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \quad \text{ist monoton fallend für } x > x_0$$

und daher

$$\exists \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \quad \text{in } \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$$

Analog: $\exists \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \quad \text{in } \mathbb{R} \cup \{\infty\}$

Noch z.z.

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Seien $x_1 < x_0 < x_2$

$$x_0 = \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2$$

$$\Longrightarrow \frac{x_0 - x_2}{x_1 - x_2} = \lambda$$

$$\Longrightarrow f(x_0) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

$$= \frac{x_0 - x_2}{x_1 - x_2} f(x_1) + \left(1 - \frac{x_0 - x_2}{x_1 - x_2}\right) f(x_2)$$

$$= \frac{x_0 - x_2}{x_1 - x_2} f(x_1) + \frac{x_1 - x_0}{x_1 - x_2} f(x_2)$$

Nun, da $\frac{x_1 - x_0}{x_1 - x_2} > 0$ gilt

$$f(x_2) \geq \frac{x_1 - x_2}{x_1 - x_0} \left\{ f(x_0) - \frac{x_0 - x_2}{x_1 - x_2} f(x_1) \right\}$$

$$= \frac{x_1 - x_2}{x_1 - x_0} f(x_0) - \frac{x_0 - x_2}{x_1 - x_0} f(x_1)$$

$$\Longrightarrow \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0}$$

$$\geq \frac{1}{x_2 - x_0} \left\{ \left(\frac{x_1 - x_2}{x_1 - x_0} - 1 \right) f(x_0) - \frac{x_0 - x_2}{x_1 - x_0} f(x_1) \right\}$$

$$= \frac{1}{x_2 - x_0} \left\{ f(x_0) \frac{x_0 - x_2}{x_1 - x_0} - \frac{x_0 - x_2}{x_1 - x_0} f(x_1) \right\}$$

$$= \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$\underset{x_1 \to x_0^-}{\overset{x_2 \to x_0^+}{\Longrightarrow}} \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Damit existeren beide GW in $\mathbb{R}$.

Nun Beh

$$\alpha \in \left[\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} , \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right]$$

$$\Longrightarrow \alpha \in \partial_0 f(x_0)$$

denn sei ~~$x \in \mathbb{R}$~~. $x \in]$

<u>Fall 1</u> $x > x_0$

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} (x - x_0)$$

$$\underset{\text{Diffquot, monoton fallend}}{\overset{x > x_0}{\geq}} \lim_{y \to x_0^+} \frac{f(y) - f(x_0)}{y - x_0} (x - x_0)$$

$$\overset{x > x_0}{\geq} \alpha (x - x_0)$$

$$\Longrightarrow f(x) \geq f(x_0) + \alpha (x - x_0),$$

<u>Fall 2</u> $x < x_0$

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} (x - x_0)$$

$$\overset{x<x_0}{\geq} \lim_{y \to x_0^-} \frac{f(y) - f(x_0)}{y - x_0} (x - x_0)$$

D.-Quotient monwachsend

$$\overset{x<x_0}{\geq} \alpha (x - x_0).$$

$$\Longrightarrow f(x) \geq f(x_0) + \alpha (x - x_0),$$

$\rightarrow$ Falls x_0 ein Randpunkt von J ist und existiert der einseitige GW und dieser ist ein Subgradient.

(K)

z.z. $f^{**}(x) = \sup\{h(x) \mid h : X \to \mathbb{R}\ h \text{ konvex};$
$h \leq f\}$

f^{**} konvex ✓ $f^{**} \leq f$ ✓

$\Longrightarrow f^{**} \leq \sup\{h(x) \mid h : X \to \overline{\mathbb{R}};\ h \text{ konvex}, h \leq f\}$

Nun sei

$h \leq f$ konvex Dann $h(x) < \infty\ \forall x \in \mathbb{R}$

Nun $f^* \leq h^*$ nach A44d

$\Longrightarrow h^{**} \leq f^{**}$ nach A44d

Nun $h^{**}(x) = h(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$

$\Longrightarrow h(x) \leq f^{**}(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$

$\Longrightarrow f^{**} \geq \sup\{h(x) \mid h : X \to \overline{\mathbb{R}};\ h \text{ konvex}, h \leq f\}$