



Übungen Variationsrechnung: Blatt 11

40. (Schwache Konvergenz und Homogenisierung)

Sei $p \in [1, \infty]$. Es ist aus der Funktionalanalysis bekannt, dass wir den Dualraum von $L^1(0, 1)$ mit $L^\infty(0, 1)$ identifizieren können. Sprechen wir in dieser Aufgabe von schwach- $*$ -Konvergenz von L^∞ -Funktionen, so beziehen wir uns auf genau diese Identifikation.

- (a) Sei $(f_n) \subset L^\infty(0, 1)$ eine Folge und $f \in L^\infty(0, 1)$. Zeige: $f_n \xrightarrow{*} f$ in $L^\infty(0, 1)$ genau dann wenn (f_n) in L^∞ beschränkt ist und wenn für alle $0 < a < b < 1$ gilt, dass

$$\int_0^1 f_n \chi_{(a,b)} dx \rightarrow \int_0^1 f \chi_{(a,b)} dx. \quad (1)$$

- (b) Sei $u \in L^p_{loc}(\mathbb{R})$ periodisch mit Periode 1, d.h. es gilt fast überall auf \mathbb{R} , dass $u(x+1) = u(x)$. Sei für $\epsilon > 0$

$$u_\epsilon(t) := u\left(\frac{t}{\epsilon}\right) \quad (2)$$

und

$$\bar{u} := \int_0^1 u(t) dt \quad (3)$$

Zeige: Dann gilt $u_\epsilon \xrightarrow{*} \bar{u}$ in $L^\infty(0, 1)$ falls $p = \infty$ und $u_\epsilon \rightharpoonup u$ in $L^p(0, 1)$ falls $1 \leq p < \infty$.

41. (Die Yoshida-Approximation)

Es sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ eine nach unten beschränkte Funktion. Definiere für $\lambda > 0$ die Yoshida-Approximation von $T_\lambda f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$T_\lambda f(x) := \inf\{f(y) + \lambda|x - y| \mid y \in \mathbb{R}\}. \quad (4)$$

Zeige die folgenden Behauptungen :

- (a) Für alle $\lambda > 0$ gilt $T_\lambda f(x) \leq f(x)$
- (b) Ist $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2$ so gilt $T_{\lambda_1} f \leq T_{\lambda_2} f$
- (c) $T_\lambda f$ ist Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante λ .
- (d) Für $\lambda \rightarrow \infty$ konvergiert $T_\lambda f$ punktweise gegen f genau dann wenn f unterhalbstetig ist.
- (e) Ist f konvex, so ist $T_\lambda f$ konvex.
- (f) Schlage nochmal den Beweis von Lemma 2.4 auf und beweise den dort benutzten Hilfssatz.

42. (Unterhalbstetigkeit und der Epigraph)

- (a) Es sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Definiere

$$\text{epi}(f) = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x) \leq t\} \quad (5)$$

Zeige: f ist unterhalbstetig genau dann wenn $\text{epi}(f)$ abgeschlossen ist.

- (b) Zeige für eine Funktion f wie in (a) : $\text{epi}(sc^- f) = \overline{\text{epi}(f)}$.

43. (Eine Messbarkeits-Frage in Beispiel 2.6)

Es sei (Ω, \mathcal{A}) ein messbarer Raum und $f : \Omega \times \mathbb{R}^m \rightarrow [-\infty, \infty]$ eine $\mathcal{A} \times \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ -messbare Funktion. Zeige: Dann ist für jede \mathcal{A} -messbare Funktion $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ die Funktion

$$g : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : g(x) = f(x, u(x)). \quad (6)$$

\mathcal{A} -messbar.

Anmerkung: Um Verwirrung zu vermeiden: Ich meine mit einer \mathcal{A} -messbaren Funktion eine Funktion $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ derart, dass das Urbild jeder Borel-Menge in der Sigma-Algebra \mathcal{A} liegt.

Anmerkung: Verwunderlich ist vielleicht, dass hier die Unterhalbstetigkeit von f , die in Beispiel 2.6 auch Voraussetzung ist, gar nicht benötigt wird. Normalerweise ist die Verkettung von \mathcal{A} -messbaren Funktionen nicht zwingend \mathcal{A} -messbar, jedoch schon, wenn die äußere Funktion sogar Borel-messbar ist, was hier (modulo Produktmaße) der Fall ist.

44. (Die Konvex-Konjugierte Funktion)

Im Folgenden wollen wir einige Eigenschaften der Konvex-Konjugierten Funktion nachweisen. Wir suchen uns hierfür sogar ein allgemeineres Setting: Es seien X, U normierte Vektorräume und $f : X \rightarrow [-\infty, \infty]$. Sei dazu $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times U \rightarrow \mathbb{R}$ eine Bilinearform. Definiere für $u \in U$

$$f^*(u) := \sup_{x \in X} \{ \langle x, u \rangle - f(x) \}. \quad (7)$$

Die Funktion heißt im Folgenden die konvex-Konjugierte von X . In der Vorlesung haben wir bereits gesehen, dass f^* unter den gegebenen Voraussetzungen tatsächlich konvex ist. Wir können auch die doppelt-konvex Konjugierte bilden, allerdings nur bezüglich der folgenden Bilinearform:

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : U \times X \rightarrow \mathbb{R} \quad (u, x) := \langle x, u \rangle. \quad (8)$$

Schreibt man das aus, so kann man definieren

$$f^{**}(x) := \sup_{u \in U} \{ \langle x, u \rangle - f^*(u) \}. \quad (9)$$

- (a) Seien zunächst $X = U = \mathbb{R}$ und die Bilinearform die Multiplikation. Sei $p \in (1, \infty)$ und setze $f(x) = \frac{|x|^p}{p}$. Zeige $f^*(u) = \frac{|u|^q}{q}$, wobei q so, dass $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
- (b) Es sei wieder $X = U = \mathbb{R}$ und $f(x) = e^x - 1$. Berechne f^* .
- (c) Zeige die **Young'sche Ungleichung**: Ist $x \in X$ so, dass $f(x) \notin \{-\infty, \infty\}$ so gilt

$$\langle x, u \rangle \leq f(x) + f^*(u) \quad \forall u \in U \quad (10)$$

- (d) Zeige: Falls $f \leq g$ so ist $g^* \leq f^*$
- (e) Ist $g(x) = f(\lambda x)$ für alle $x \in X$ und für ein $\lambda \neq 0$, so ist $g^*(u) = f^*(\frac{u}{\lambda})$ für alle $u \in U$
- (f) Zeige $f^{**} \leq f$.

Wir würden erwarten, dass $f^{**} = f$, falls f bereits konvex ist. Zunächst formulieren wir die folgende Bedingung: Wir sagen $f : X \rightarrow [-\infty, \infty]$ hat einen Subgradienten in $y \in X$ falls es ein $z \in U$ gibt derart, dass

$$f(x) \geq f(y) + \langle x - y, z \rangle \quad \forall x \in X. \quad (11)$$

Ein solches $z \in U$ nennen wir Subgradienten von f in y . Die Menge aller Subgradienten von f in y bezeichnen wir mit $\partial f(y)$.

- (g) Zeige: Die Menge aller Subgradienten ist stets konvex.
- (h) Hat f bei $y \in X$ ein globales Minimum, so ist $0 \in \partial f(y)$.
- (i) Zeige: Besitzt f für $x \in X$ einen Subgradienten, so ist $f^{**}(x) = f(x)$
- (j) Sei nun wieder $X = U = \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ konvex. Zeige: Für alle $x \in \mathbb{R}$ sodass $f(x) < \infty$ existiert ein Subgradient von f in x .
- (k) Seien wieder $X = U = \mathbb{R}$ und sei $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ reellwertig. Zeige: Für alle $x \in X$ gilt

$$f^{**}(x) = \sup \{ h(x) \mid h : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}} \text{ konvex, } h \leq f \}. \quad (12)$$