UNIVERSITÄT ULM

Abgabe: Donnerstag, 01.02.2017

Prof. Dr.Anna Dall'Acqua
Marius Müller
Wintersemester 2017/18
Punktzahl: keine

Übungen Variationsrechnung: Blatt 11

40. (Schwache Konvergenz und Homogenisierung)

Sei $p \in [1, \infty]$. Es ist aus der Funktionalanalysis bekannt, dass wir den Dualraum von $L^1(0,1)$ mit $L^\infty(0,1)$ identifizieren können. Sprechen wir in dieser Aufgabe von schwach-$*$-Konvergenz von L^∞-Funktionien, so beziehen wir uns auf genau diese Identifikation.

(a) Sei $(f_n) \subset L^\infty(0,1)$ eine Folge und $f \in L^\infty(0,1)$. Zeige: $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ in $L^\infty(0,1)$ genau dann wenn (f_n) in L^∞ beschränkt ist und wenn für alle $0 < a < b < 1$ gilt , dass

$$\int_0^1 f_n \chi_{(a,b)} dx \to \int_0^1 f \chi_{(a,b)} dx. \tag{1}$$

(b) Sei $u \in L^p_{loc}(\mathbb{R})$ periodisch mit Periode 1, d.h. es gilt fast überall auf $\mathbb{R}$, dass $u(x+1) = u(x)$. Sei für $\epsilon > 0$

$$u_\epsilon(t) := u(\frac{t}{\epsilon}) \tag{2}$$

und

$$\overline{u} := \int_0^1 u(t) dt \tag{3}$$

Zeige: Dann gilt $u_\epsilon \overset{*}{\rightharpoonup} \overline{u}$ in $L^\infty(0,1)$ falls $p = \infty$ und $u_\epsilon \rightharpoonup u$ in $L^p(0,1)$ falls $1 \le p < \infty$.

41. (Die Yoshida-Approximation)

Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ eine nach unten beschränkte Funktion. Definiere für $\lambda > 0$ die Yoshida-Approximation von $T_\lambda f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$T_\lambda f(x) := \inf\{f(y) + \lambda|x - y| \mid y \in \mathbb{R}\}. \tag{4}$$

Zeige die folgenden Behauptungen :

(a) Für alle $\lambda > 0$ gilt $T_\lambda f(x) \le f(x)$

(b) Ist $0 \le \lambda_1 \le \lambda_2$ so gilt $T_{\lambda_1} f \le T_{\lambda_2} f$

(c) $T_\lambda f$ ist Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante λ.

(d) Für $\lambda \to \infty$ konvergiert $T_\lambda f$ punktweise gegen f genau dann wenn f unterhalbstetig ist.

(e) Ist f konvex, so ist $T_\lambda f$ konvex .

(f) Schlage nochmal den Beweis von Lemma 2.4 auf und beweise den dort benutzten Hilfssatz.

42. (Unterhalbstetigkeit und der Epigraph)

(a) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Definiere

$$\text{epi}(f) = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x) \le t\} \tag{5}$$

Zeige: f ist unterhalbstetig genau dann wenn epi(f) abgeschlossen ist .

(b) Zeige für eine Funktion f wie in (a) : $\text{epi}(sc^- f) = \overline{\text{epi}(f)}$.
Hinweis: Versuche zunächst zu zeigen, dass es sich bei $\overline{\text{epi}(f)}$ überhaupt um einen Epigraphen einer Funktion handelt: Wie kannst du aus dem Epigraphen die Funktion ablesen ?

43. (Eine Messbarkeits-Frage in Beispiel 2.6)

Es sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum und $f : \Omega \times \mathbb{R}^m \to [-\infty, \infty]$ eine $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$-messbare Funktion. Zeige: Dann ist für jede $\mathcal{A}$- messbare Funktion $u : \Omega \to \mathbb{R}^m$ die Funktion

$$g : \Omega \to \mathbb{R} : \quad g(x) = f(x, u(x)) \tag{6}$$

$\mathcal{A}$-messbar.
Anmerkung: Um Verwirrung zu vermeiden: Ich meine mit einer $\mathcal{A}$-messbaren Funktion eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ derart, dass das Urbild jeder Borel-Menge in der Sigma-Algebra $\mathcal{A}$ liegt.
Anmerkung: Verwunderlich ist vielleicht, dass hier die Unterhalbstetigkeit von f, die in Beispiel 2.6 auch Voraussetzung ist, gar nicht benötigt wird. Normalerweise ist die Verkettung von $\mathcal{A}$-messbaren Funktionen nicht zwingend $\mathcal{A}-$messbar, jedoch schon, wenn die äußere Funktion sogar Borel-messbar ist, was hier (modulo Produktmaße) der Fall ist.
Hinweis: Schreibe f zunächst als Punktweisen Grenzwert von Treppenfunktionen und ziehe dich damit auf den Fall einer charakteristischen Funktion einer Menge aus $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(\mathcal{R}^m)$ zurück.

44. (Die Konvex-Konjugierte Funktion)
Im Folgenden wollen wir einige Eigenschaften der Konvex-Konjugierten Funktion nachweisen. Wir suchen uns hierfür sogar ein allgemeineres Setting: Es seien X, U normierte Vektorräume und $f : X \to [-\infty, \infty]$. Sei dazu $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times U \to \mathbb{R}$ eine Bilinearform. Definiere für $u \in U$

$$f^*(u) := \sup_{x \in X}\{\langle x, u\rangle - f(x)\}. \tag{7}$$

Die Funktion heißt im Folgenden die konvex-Konjugierte von X. In der Vorlesung haben wir bereits gesehen, dass f^* unter den gegebenen Vorraussetzungen tatsächlich konvex ist. Wir können auch die doppelt-konvex Konjugierte bilden, allerdings nur bezüglich der folgenden Bilinearform:

$$(\cdot, \cdot) : U \times X \to \mathbb{R} \quad (u, x) := \langle x, u\rangle. \tag{8}$$

Schreibt man das aus, so kann man definieren

$$f^{**}(x) := \sup_{u \in U}\{\langle x, u\rangle - f^*(u)\}. \tag{9}$$

(a) Seien zunächst $X = U = \mathbb{R}$ und die Bilinearform die Multiplikation. Sei $p \in (1, \infty)$ und setze $f(x) = \frac{|x|^p}{p}$. Zeige $f^*(u) = \frac{|u|^q}{q}$, wobei q so , dass $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

(b) Es sei wieder $X = U = \mathbb{R}$ und $f(x) = e^x - 1$. Berechne f^*.

(c) Zeige die **Young'sche Ungleichung:** Ist $x \in X$ so, dass $f(x) \notin \{-\infty, \infty\}$ so gilt

$$\langle x, u\rangle \leq f(x) + f^*(u) \quad \forall u \in U \tag{10}$$

(d) Zeige: Falls $f \leq g$ so ist $g^* \leq f^*$

(e) Ist $g(x) = f(\lambda x)$ für alle $x \in X$ und für ein $\lambda \neq 0$, so ist $g^*(u) = f^*(\frac{u}{\lambda})$ für alle $u \in U$

(f) Zeige $f^{**} \leq f$.

Wir würden erwarten, dass $f^{**} = f$, falls f bereits konvex ist. Zunächst formulieren wir die folgende Bedingung: Wir sagen $f : X \to [-\infty, \infty]$ hat einen Subgradienten in $y \in X$ falls es ein $z \in U$ gibt derart, dass

$$f(x) \geq f(y) + \langle x - y, z\rangle \quad \forall x \in X. \tag{11}$$

Ein solches $z \in U$ nennen wir Subgradienten von f in y. Die Menge aller Subgradienten von f in y bezeichnen wir mit $\partial f(y)$.

(g) Zeige: Die Menge aller Subgradienten ist stets konvex.

(h) Hat f bei $y \in X$ sin globales Minimum, so ist $0 \in \partial f(y)$.

(i) Zeige: Besitzt f für $x \in X$ einen Subgradienten, so ist $f^{**}(x) = f(x)$

(j) Sei nun wieder $X = U = \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ konvex. Zeige: Für alle $x \in \mathbb{R}$ sodass $f(x) < \infty$ existiert ein Subgradient von f in x.
Hinweis: Vergegenwärtige dir zunächst, dass, falls $f(x) < \infty$ in einer Umegebung von x , so existieren

$$\lim_{y \to x+} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \quad \text{und} \quad \lim_{y \to x-} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \tag{12}$$

als Elemente von $\mathbb{R}$!.

(k) Seien wieder $X = U = \mathbb{R}$ und sei $f : X \to \mathbb{R}$ reellwertig. Zeige: Für alle $x \in X$ gilt

$$f^{**}(x) = \sup\{h(x)|\ h : X \to \overline{\mathbb{R}} \text{ h konvex}, h \leq f\}. \tag{13}$$