

Aufgabe 45

(X, d) separabler metrischer Raum

$$F_j: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$$

Nun sei $\{z_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ eine abzählbare dichte Teilmenge in X

$\Rightarrow \forall m \in \mathbb{N} \forall k \in \mathbb{N} \exists$ Teilfolge

$(\sigma_j^{m,k})_{j \in \mathbb{N}}$ von $\mathbb{N}$ sodass gilt

$$\exists \lim_{j \rightarrow \infty} \inf_{y \in B_{\frac{1}{m}}(z_k)} F_{\sigma_j^{m,k}}(y) \quad \text{in } \overline{\mathbb{R}} \quad \begin{array}{l} \text{(d.h. eigentlich} \\ \text{oder} \\ \text{uneigentlich)} \end{array}$$

Diagonalfolgenargument

$\exists$ Teilfolge σ_ℓ :

$\hookrightarrow$ [später!]

$$\forall m \in \mathbb{N} \forall k \in \mathbb{N}$$

$$\exists \lim_{\ell \rightarrow \infty} \inf_{y \in B_{\frac{1}{m}}(z_k)} F_{\sigma_\ell}(y) \quad \text{in } \overline{\mathbb{R}}$$

Nun setze

$$F_\infty(x) := \sup_{m \in \mathbb{N}} \inf_{\substack{k \in \mathbb{N}: \\ x \in B_{\frac{1}{m}}(z_k)}} \lim_{\ell \rightarrow \infty} \inf_{y \in B_{\frac{1}{m}}(z_k)} F_{\sigma_\ell}(y)$$

Beachte:

$$F_\infty = \limsup_{m \rightarrow \infty} \inf_{\substack{k \in \mathbb{N}: \\ x \in B_{\frac{1}{m}}(z_k)}} \lim_{l \rightarrow \infty} \inf_{y \in B_{\frac{1}{m}}(z_k)} F_{\sigma_l}(y).$$

Behauptung

$$\Gamma\text{-}\lim_{l \rightarrow \infty} F_{\sigma_l} = F_\infty$$

Beweis

I) liminf inequality

Es sei $x_{\sigma_l} \rightarrow x$

$$\underline{\mathbb{Z}} \quad F_\infty(x) \leq \liminf_{l \rightarrow \infty} F_{\sigma_l}(x_{\sigma_l})$$

Beweis

$$\forall m \in \mathbb{N} \quad \forall k \in \mathbb{N} : x \in B_{\frac{1}{m}}(z_k)$$

$$\exists j(k, m) \in \mathbb{N} : x_l \in B_{\frac{1}{m}}(z_k) \quad \forall l \geq j(k, m)$$

$$\Rightarrow \lim_{l \rightarrow \infty} \inf_{y \in B_{\frac{1}{m}}(z_k)} F_{\sigma_l}(y)$$

$$= \lim_{\substack{l \rightarrow \infty \\ l \geq j(k, m)}} \inf_{y \in B_{\frac{1}{m}}(z_k)} F_{\sigma_l}(y) \leq \liminf_{\substack{l \rightarrow \infty \\ l \geq j(k, m)}} F_{\sigma_l}(x_{\sigma_l})$$

$$\stackrel{!}{=} \liminf_{l \rightarrow \infty} F_{\sigma_l}(x_{\sigma_l})$$

$\Rightarrow$ Beh.

damit nun

$$\sup_{m \in \mathbb{N}} \inf_{k \in \mathbb{N}} \lim_{l \rightarrow \infty} \inf_{y \in B_{\frac{1}{m}}(z_k)} F_{\sigma_l}(y) \\ \stackrel{x \in B_{\frac{1}{m}}(z_k)}{\leq} \liminf_{l \rightarrow \infty} F_{\sigma_l}(x_{\sigma_l})$$

$$\leq \liminf_{l \rightarrow \infty} F_{\sigma_l}(x_{\sigma_l})$$

II) limsup - inequality

Sei $x \in X$ und $\varepsilon > 0$.

Wir wissen:

$$\forall m \in \mathbb{N} \quad \exists k \in \mathbb{N} : x \in B_{\frac{1}{m}}(z_k)$$

$$\exists (x_l^{k_{lm}})_{l \in \mathbb{N}} : x_l^{k_{lm}} \in B_{\frac{1}{m}}(z_k) \quad \text{und}$$

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \inf_{y \in B_{\frac{1}{m}}(z_k)} F_{\sigma_l}(y) = \lim_{l \rightarrow \infty} F_{\sigma_l}(x_l^{k_{lm}})$$

Beachte:

$\forall k \in \mathbb{N} : x \in B_{\frac{1}{m}}(z_k)$ gilt:

$$x_e^{k,m} \in B_{\frac{1}{m}}(z_k) \subset B_{z_m}(x)$$

$$\Rightarrow \forall m \in \mathbb{N} \exists k_m \in \mathbb{N} : x \in B_{\frac{1}{m}}(z_{k_m}) \text{ und}$$

$$\inf_{\substack{k \in \mathbb{N} \\ x \in B_{\frac{1}{m}}(z_k)}} \lim_{l \rightarrow \infty} \inf_{y \in B_{\frac{1}{m}}(z_k)} F_{\sigma_e}(y)$$

$$= \inf_{\substack{k \in \mathbb{N} \\ x \in B_{\frac{1}{m}}(z_k)}} \lim_{l \rightarrow \infty} F_{\sigma_e}(x_e^{k,m})$$

$$\geq \lim_{l \rightarrow \infty} F_{\sigma_e}(x_e^{k_m, m}) - \varepsilon$$

$$\Rightarrow \exists (l_m)_{m \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{N} \quad l_m < l_{m+1}$$

sodass

$$\forall l \rightarrow l_m:$$

$$F_{\sigma_e}(x_e^{k_m, m}) \geq \lim_{l \rightarrow \infty} F_{\sigma_e}(x_e^{k_m, m}) - \varepsilon$$

Nun setze

$$\tilde{x}_l = x_l^{k_m, m} \quad \text{falls} \quad l_m \leq l < l_{m+1}$$

Beachte $d(\tilde{x}_l, x) < \frac{2}{m}$ sofern $l > l_m$

$$\Rightarrow \tilde{x}_l \rightarrow x \quad \text{in } X \quad \text{für } l \rightarrow \infty$$

$$\limsup_{l \rightarrow \infty} F_{\sigma_l}(\tilde{x}_l)$$

$$= \inf_{t \in \mathbb{N}} \sup_{l \geq t} F_{\sigma_l}(\tilde{x}_l)$$

$$= \inf_{t \in \mathbb{N}} \sup_{\substack{m \in \mathbb{N} \\ l_m \geq t}} \sup_{l_m \leq l < l_{m+1}} F_{\sigma_l}(\tilde{x}_l)$$

$$\leq \inf_{t \in \mathbb{N}} \sup_{\substack{m \in \mathbb{N} \\ l_m \geq t}} \lim_{l \rightarrow \infty} F_{\sigma_l}(x_l^{k_m, m}) + \varepsilon$$

$$\leq \inf_{t \in \mathbb{N}} \sup_{m \geq t} \lim_{l \rightarrow \infty} F_{\sigma_l}(x_l^{k_m, m}) + \varepsilon$$

$$= \limsup_{m \rightarrow \infty} \lim_{l \rightarrow \infty} F_{\sigma_l}(x_l^{k_m, m}) + \varepsilon$$

$$\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \inf_{\substack{k \in \mathbb{N} \\ x \in B_{\frac{1}{n}}(z_k)}} \lim_{l \rightarrow \infty} \inf_{y \in B_{\frac{1}{n}}(z_k)} F_{\sigma_l}(y) + 2\varepsilon$$

$$= F_{\infty}(x) + 2\varepsilon$$

$\Rightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists (x_\ell^\varepsilon) : x_\ell^\varepsilon \rightarrow x \text{ und}$$

$$\limsup_{l \rightarrow \infty} F_{\sigma_l}(x_\ell^\varepsilon) \leq F_{\infty}(x) + 2\varepsilon$$

$\Rightarrow$

$$T\text{-}\limsup_{l \rightarrow \infty} F_{\sigma_l}(x) \leq F_{\infty}(x)$$

$$\leq (T\text{-}\liminf_{l \rightarrow \infty} F_{\sigma_l})(x)$$

Folgt aus
der Liminf
inequality

$$\Rightarrow \exists T\text{-}\lim_{l \rightarrow \infty} F_{\sigma_l}(x)$$

$$\text{und } T\text{-}\lim_{l \rightarrow \infty} F_{\sigma_l} = F_{\infty} \quad \nabla$$

Zum Diagonal folgenargument:

Satz : Es sei M eine abzählbare Menge

und $\{i_1, i_2, \dots\}$ eine Abzählung.

Gilt für eine Familie von Folgen

(*) $\{(x_e^h) \mid h \in M\}$, dass

$i < j \Rightarrow (x_e^{i_1})_{e \in \mathbb{N}}$ ist eine Teilfolge von

$(x_e^{j_1})_{e \in \mathbb{N}}$, so hat man eine

Folge $(x_e)_{e \in \mathbb{N}}$ sodass

$(x_e)_{e \in \mathbb{N}}$ ist Teilfolge von $(x_e^h)_{e \in \mathbb{N}}$ für jedes $h \in M$.

Anwendung hier

$$M = \mathbb{N}^2 = \{(m, k) \mid m, k \in \mathbb{N}\}$$

Wähle Abzählung von M und

Konstruiere $\sigma_e^{k,m}$ sukzessive so, dass

(*) gilt.

Aufgabe 46a

Seien $x, y \in [c, d]$

Fall 1 $c \leq x < y \leq d$. Wähle $a < c' < c$.

Dann

$$f(x) - f(y) \stackrel{\text{wobei } \lambda \in [0,1]:}{=} f(\lambda y + (1-\lambda)c') - f(y)$$

$\lambda y + (1-\lambda)c' = x$
d.h. $\lambda = \frac{x-c'}{y-c'}$

$$\leq \lambda f(y) + (1-\lambda) f(c') - f(y)$$

$$= (1-\lambda) (-f(y) + f(c'))$$

$$= \frac{y-x}{y-c'} f(c') - f(y)$$

$$\leq \frac{|y-x|}{|y-c'|} |f(c') - f(y)|$$

$$\leq \frac{M-m}{c-c'} |y-x|$$

Nun für $c' \rightarrow a$ gilt $f(x) - f(y) \leq \frac{M-m}{c-a} |y-x|$

Wähle $d < d' < b$.

Dann

$$f(x) - f(y) \stackrel{\lambda \in [0,1]:}{=} f(x) - f(\lambda x + (1-\lambda)d')$$
$$\lambda x + (1-\lambda)d' = y$$
$$\Rightarrow \lambda = \frac{y-d'}{x-d'}$$

$$\geq f(x) - \lambda f(x) - (1-\lambda)f(d')$$

$$= (1-\lambda)(f(x) - f(d'))$$

$$= \frac{y-x}{x-d'} (f(x) - f(d'))$$

$$\geq - \frac{|y-x|}{d'-x} |f(x) - f(d')|$$

$$\geq - \frac{|y-x|}{d'-d} (M-m)$$

$$\geq - \frac{M-m}{d'-d} |y-x|$$

$$\text{Nun } d' \rightarrow b \Rightarrow f(x) - f(y) \geq - \frac{M-m}{b-d} |y-x|$$

$\Rightarrow$

$$-\frac{M-m}{b-d} |y-x| \leq f(x) - f(y) \leq \frac{M-m}{c-a} |y-x|$$

$$\Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \frac{M-m}{\delta} |y-x|$$

Fall 2 $c \leq y < x \leq d$ Analog (tausche Rollen von x und y)

Aufgabe 46b)

Seien $x, y \in B_r(x_0)$, $x(t) := tx + (1-t)y$

Dann $\exists a, b, c, d : a < c < d < b :$

$$x(t) \in B_r(x_0) \quad \forall t \in (a, b) \quad \text{und}$$

$$x(t) \in \overline{B_r(x_0)} \quad \forall t \in [c, d]$$

Setze $g: (a, b) \rightarrow \mathbb{R} \quad g: t \mapsto f(x(t))$

Dann: g ist konvex denn

$$\begin{aligned} g(\lambda s + (1-\lambda)t) &= f(x(\lambda s + (1-\lambda)t)) \\ &= f\left(\left[\lambda s + (1-\lambda)t\right]x + \left\{1 - \left[\lambda s + (1-\lambda)t\right]\right\}y\right) \\ &= f\left(\lambda(sx + (1-s)y) + (1-\lambda)(tx + (1-t)y)\right) \\ &\leq \lambda f(sx + (1-s)y) + (1-\lambda)f(tx + (1-t)y) \\ &= \lambda f(x(s)) + (1-\lambda)f(x(t)) \\ &= \lambda g(s) + (1-\lambda)g(t) \end{aligned}$$

Nun

$$|f(x) - f(y)| = |f(x(1)) - f(x(0))|$$

$$= |g(1) - g(0)| = \frac{M-m}{\min\{\cancel{b-d}, c-a\}} |1-0|$$

$$= \frac{M-m}{\min\{\cancel{b-d}, c-a\}} \quad (x^*)$$

Beachte

$$R = \|x(a) - x_0\| \leq \|x(a) - x(c)\| + \|x(c) - x_0\|$$

$$= \|x(a) - x(c)\| + r$$

$$= \|ax + (1-a)y - cx + (1-c)y\| + r$$

$$= \|(a-c)(x-y)\| + r$$

$$= (c-a) \|x-y\| + r$$

$$\Rightarrow (c-a) \geq \frac{R-r}{\|x-y\|}$$

$$\text{Analog: } b-d \geq \frac{R-r}{\|x-y\|}$$

$$\xRightarrow{(x^*)} |f(x) - f(y)| \leq \frac{M-m}{R-r} \|x-y\|$$

Aufgabe 47

(a) Sei

$$\sup_{j \in \mathbb{N}} F_j(u_j) < \infty$$

$$|I_j^\eta| = |\{x \in (a,b) \mid \eta < u_j(x) < 1-\eta\}|$$

$$= |\{x \in (a,b) \mid W(u_j(x)) > W(\eta)\}|$$

↓

$W \uparrow$ auf $(\frac{1}{2}, 1)$

$W \downarrow$ auf $(\frac{1}{2}, 1)$

$$\stackrel{\text{Tschebyscheff}}{\leq} \frac{1}{W(\eta)} \int_a^b W(u_j(x)) \, dx$$

$$\leq \frac{1}{j W(\eta)} \underbrace{\int_a^b j W(u_j(x)) \, dx}_{\leq F_j(u_j)}$$

$$\leq \frac{1}{j W(\eta)} \sup_{\tilde{j} \in \mathbb{N}} F_{\tilde{j}}(u_{\tilde{j}}) \xrightarrow{(j \rightarrow \infty)} 0$$

A47b)

$$u_j \rightarrow u \text{ in } L^1(a,b)$$

$$\sup_{j \in \mathbb{N}} \int_a^b u_j < \infty$$

$$\sum_{j \in \mathbb{N}} u_j \in \{0,1\} \text{ fast überall.}$$

Beachte:

$$\exists \text{ TF } u_{\varepsilon_j}, u_{\varepsilon_j} \rightarrow u \text{ p.k.w. für } \varepsilon_j \rightarrow 0$$

Sei $\eta > 0$

$$|\{y \in (a,b) \mid \eta < u(y) < 1-\eta\}|$$

$$= \int \chi_{\{y \in (a,b) \mid \eta < u(y) < 1-\eta\}}(x) dx$$

$$= \int \liminf_{j \rightarrow \infty} \chi_{\{y \in (a,b) \mid \eta < u_{\varepsilon_j}(y) < 1-\eta\}}(x) dx$$

$$\stackrel{\text{Fatou}}{\leq} \liminf_{j \rightarrow \infty} \int \chi_{\{y \in (a,b) \mid \eta < u_{\varepsilon_j}(y) < 1-\eta\}}(x) dx$$

$$= \liminf_{j \rightarrow \infty} |I_{x_j}^\eta| \stackrel{(a)}{=} 0$$

$$\Rightarrow \forall \eta > 0$$

$$|\{y \in (a,b) \mid \eta < u(y) < 1-\eta\}| = 0$$

$$\Rightarrow \forall m \in \mathbb{N}$$

$$|\{y \in (a,b) \mid \frac{1}{m} < u(y) < 1 - \frac{1}{m}\}| = 0$$

Monotonie des Maßes & Stetigkeit des Maßes

$$|\{y \in (a,b) \mid 0 < u(y) < 1\}|$$

$$= \left| \bigcup_{m=1}^{\infty} \{y \in (a,b) \mid \frac{1}{m} < u(y) < 1 - \frac{1}{m}\} \right|$$

$$= \lim_{m \rightarrow \infty} |\{y \in (a,b) \mid \frac{1}{m} < u(y) < 1 - \frac{1}{m}\}|$$

$$= \lim_{m \rightarrow \infty} 0 = 0.$$

$$\Rightarrow u \in \{0,1\} \text{ f\"ur }.$$

(c) Es kann höchstens abzählbar viele Übergangsintervalle geben, denn jedes Übergangsintervall enthält eine rationale Zahl. Das liefert eine injektive Abbildung

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Menge aller} \\ \text{Übergangsintervalle} \end{array} \right\} \longrightarrow \mathbb{Q}.$$

A_J ist offen als Vereinigung offener Intervalle

$$\Rightarrow A_J = \bigcup_{k=1}^{N_J} (a_k', b_k')$$

wobei (a_k', b_k') paarweise disjunkte Übergangsintervalle sind, $N_J \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

Beh $N_J < \infty$

Beweis

Beachte: Insbesondere gilt:

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad u_j(a_k') \in \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4} \right] \text{ und } u_j(b_k') \in \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4} \right] \quad u_j(a_k') \neq u_j(b_k')$$

Angenommen $N_j = \infty$

$$\Rightarrow F_j(u_j) = \int_0^1 \left(\frac{1}{j} |u_j'|^2 + j W(u_j) \right) dx$$

$$\stackrel{\text{Maatene}}{\geq} \sum_{\text{Konvergenz } k=1}^{\infty} \int_{a_k^j}^{b_k^j} \left(\frac{1}{j} |u_j'|^2 + j W(u_j) \right) dx$$

$$\stackrel{\text{Young}}{\geq} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{a_k^j}^{b_k^j} 2 |u_j'| \sqrt{W(u_j)} dx$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \left| \int_{u_j(a_k^j)}^{u_j(b_k^j)} 2 \sqrt{W(s)} ds \right|$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} 2 \underbrace{\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} \sqrt{W(s)} ds}_{\geq \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{4} \right) = \frac{3}{32}}$$

$$= \infty$$

$$\Rightarrow N_j < \infty.$$

Daher

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} F_k(u_k) \geq F_j(u_j)$$

$$= \sum_{k=1}^{N_j} \int_{a_k^j}^{b_k^j} \left(\frac{1}{j} |u_j'|^2 + j W(u_j) \right) dx$$

wie
vorher $\Rightarrow$

$$\sum_{k=1}^{N_j} \left| \int_{a_k^j}^{b_k^j} 2 u_j' \sqrt{W(u_j)} dx \right|$$

$$= \sum_{k=1}^{N_j} 2 \int_{u_j(a_k^j)}^{u_j(b_k^j)} \sqrt{W(s)} ds$$

$$= \sum_{k=1}^{N_j} 2 \int_{\frac{1}{4}}^{2u} \sqrt{W(s)} ds$$

$$\geq N_j \frac{3}{16}$$

$$\Rightarrow N_j \leq \frac{16}{3} \sup_{k \in \mathbb{N}} F_k(u_k) \quad \forall j \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow (N_j) \text{ beschränkt}$$

(d)

N_j beschränkt

Bolzano
 $\implies$
Weierstraß $\exists N_{\tilde{l}_j}$ konvergente Teilfolge.

Da $(N_{\tilde{l}_j}) \subset \mathbb{N}$ muss

$N_{\tilde{l}_j}$ ab einem gewissen Index M
konstant identisch N sein.

Für $j > M$ ist also [siehe (c)]

$$A_{\tilde{l}_j} = \bigcup_{k=1}^N (a_k^{\tilde{l}_j}, b_k^{\tilde{l}_j})$$

Nun

$$a \leq a_k^{\tilde{l}_j} \leq b$$

$$a \leq b_k^{\tilde{l}_j} \leq b \quad \forall j$$

Bolzano

$\implies \exists$ TF $\tilde{l}_j: \forall k \in \mathbb{N} \quad a_k^{\tilde{l}_j} \longrightarrow a_k$
Weierstraß und $b_k^{\tilde{l}_j} \longrightarrow b_k$

für diverse $a_k, b_k \in (a, b)$

Nun für $J > M$

$$|A_{e_J}| = \sum_{k=1}^N |b_k^{e_J} - a_k^{e_J}| \xrightarrow{J \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N |b_k - a_k|$$

aber

$$|A_{e_J}| \leq |I_{e_J}^{\frac{1}{4}}| \xrightarrow[A_{f_J}(a)]{J \rightarrow \infty} 0,$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^N |b_k - a_k| = 0$$

$$\Rightarrow b_k = a_k \quad \forall k = 1, \dots, N$$

A47 e)

Sei $u_j \rightarrow u$ in $L'(a, b)$, $u \in \{q\}$ für
etwa $u \in \delta_1$ auf
 $(a, b) \setminus L_1$
 $|L_1| = 0$.

$\Rightarrow \exists$ Teilfolge $u_{j_k} \rightarrow u$ punktweise
fast überall, also etwa $u_{j_k} \rightarrow u$
punktweise auf $(a, b) \setminus L_2$ für eine
Lebesgue'sche Nullmenge L_2 . Wähle o.B.d.A.
 $(\tilde{f}_j)$ eine TF von (f_j) aus A47(d).

Sei $A = \{a_1, \dots, a_N\}$ wobei a_i wie
in (d). O.B.d.A. $a_1 < \dots < a_N$

[Es kann durchaus sein, dass in A47 d manche
der a_i gleich sind. Doppelungen sollten hier
einfach weggeworfen werden]

Falls $a_1 \neq a$ bzw. $a_N \neq b$ setze

$a_0 := a$ bzw. $a_{N+1} := b$

Bew $\forall i : u \equiv \text{const}$ für auf

$$(a_i, a_{i+1}) \setminus \underbrace{(L_1 \cup L_2)}_{\text{Nullmenge}}$$

Bew Angenommen $\exists t, s \notin L_1 \cup L_2$

$$a_i < t < s < a_{i+1} \quad \text{derart, dass}$$

$$(i) \quad u(t) = 1, \quad u(s) = 0 \quad \text{oder}$$

$$(ii) \quad u(s) = 0, \quad u(t) = 1$$

[OBdA betrachten wir hier nur Fall (ii),
Fall (i) ist analog]

$$1 = u(t) = \lim_{j \rightarrow \infty} u_{f_j}^{\sim}(t)$$

$$0 = u(s) = \lim_{j \rightarrow \infty} u_{f_j}^{\sim}(s)$$

Zwischenwertsatz



Satz

$$\exists j \in \mathbb{N} : j \geq j \Rightarrow$$

$$u_{f_j}^{\sim}(t) \geq \frac{3}{4} \\ u_{f_j}^{\sim}(s) \leq \frac{1}{4}$$

Seien nun N, a_k^l, b_k^l wie in A47d.

$$\Rightarrow \forall j \in \mathbb{N} \quad \exists h_{\tilde{t}_j} \in \{1, \dots, N\}$$

$$(a_{h_{\tilde{t}_j}}^{\tilde{t}_j}, b_{h_{\tilde{t}_j}}^{\tilde{t}_j}) \subset (t, s)$$

Die Folge $(h_{\tilde{t}_j})$ hat eine konstante Teilfolge, denn sie ist beschränkt und nimmt nur Werte in $\mathbb{N}$ an.

$\Rightarrow$ Nach Auswahl einer Teilfolge $h_{\tilde{t}_j} \equiv k$ für ein $k \in \{1, \dots, N\}$

$$\Rightarrow (a_k^{\tilde{t}_j}, b_k^{\tilde{t}_j}) \subset (t, s) \quad \forall j$$

Nun $a_k^{\tilde{t}_j}, b_k^{\tilde{t}_j} \longrightarrow a_k$

$$\Rightarrow a_k \in [t, s] \quad \Downarrow$$

da $a_i < t < s < a_{i+1}$

also können zwischen t, s keine a_k

liegen. $\Rightarrow$ Beh.

A47(f)

Sei $u_j \rightarrow u$ in $L^1(a,b)$

O.B.d.A. $\liminf_{j \rightarrow \infty} F_j(u_j) < \infty$ [sonst trivial]

Damit gibt es eine Teilfolge von $(F_j(u_j))_{j \in \mathbb{N}}$ die beschränkt ist

$\xrightarrow{(b.l.)} \Rightarrow u$ ist auf (a,b) stückweise stetig

und $u \in \{0,1\}$ fast überall.

[Wähle einen Repräsentanten ~~so~~ $u \in \{0,1\}$ überall!]

Beachte auch: $\exists L$ Lebesgue Nullmenge und

eine TF $u_j \rightarrow u$ punktweise auf $(a,b) \setminus L$

Seien nun $\{\alpha_1, \dots, \alpha_T\}$ die Unstetigkeitsstellen

von u in (a,b) , O.B.d.A. $\alpha_1 < \dots < \alpha_T$

Setze dazu $\alpha_0 := a$, $\alpha_{T+1} = b$.

Nun

$\forall i \in \{0, \dots, T\} \quad \exists \beta_i \in (\alpha_i, \alpha_{i+1}) \setminus L$

$$(f) \quad u_j \rightarrow u \quad \text{in } L^1(a, b)$$

$$\sup_{j \in \mathbb{N}} \int_a^b |u_j| < \infty$$

[Wir können eigentlich nur annehmen
dass eine Teilfolge von $(f_j(u_j))$ existiert
die beschränkt ist, aber daraus werden
dieselben Eigenschaften folgen]

$$\Rightarrow u \in PC(a, b) \quad \left[\begin{array}{l} \text{stückweise} \\ \text{stetig} \end{array} \right]$$

$$u(x) \in \{q_i\} \quad \text{für}$$

$$\exists^{TF} u_{q_i} \rightarrow u \quad \text{pktw für, etwa}$$

$$\text{auf } (a, b) \setminus M, \quad \lambda(M) = 0$$

Seien nun

$\{a_1, \dots, a_T\}$ die Unstetigkeitsstellen

von u in (a, b)

$$\text{zusätzlich } a_0 := a \quad a_{T+1} := b$$

$$\text{d.h. } u_{\varepsilon_j}(\beta_i) \rightarrow u(\beta_i) \quad \forall i \in \{0, \dots, T\}$$

Daher:

$$\liminf_{j \rightarrow \infty} \int_a^b \left(j |u_{\varepsilon_j}'|^2 + \frac{1}{j} W(u_{\varepsilon_j}) \right) dx$$

$$\geq \liminf_{j \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{T-1} \int_{\beta_i}^{\beta_{i+1}} \left(j |u_{\varepsilon_j}'|^2 + \frac{1}{j} W(u_{\varepsilon_j}) \right) dx$$

$$\geq \liminf_{j \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{T-1} \left| \int_{\beta_i}^{\beta_{i+1}} 2 u_{\varepsilon_j}' \sqrt{W(u_{\varepsilon_j})} dx \right|$$

$$= \liminf_{j \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{T-1} 2 \int_{u_{\varepsilon_j}(\beta_i)}^{u_{\varepsilon_j}(\beta_{i+1})} \sqrt{W(s)} ds$$

$$= \sum_{i=0}^{T-1} 2 \int_0^1 \sqrt{W(s)} ds$$

$$= \sum_{i=0}^{T-1} 2 \int_0^1 s(1-s) ds$$

$$= \sum_{i=0}^{T-1} 2 \underbrace{\int_0^1 (s-s^2) ds}_{=\frac{1}{6}} = \frac{1}{3} T$$

$$= \frac{1}{3} \# \{x \in (a, b) \mid u(x+) \neq u(x-)\}$$

(g) Sei $u(t) = \begin{cases} 0 & a < t \leq t_0 \\ 1 & t_0 < t < b \end{cases}$

Der Tipp war:

Die Ungleichung

$$\frac{1}{j} |u_j'|^2 + j W(u_j) \geq 2 |u_j'| \sqrt{j W(u_j)}$$

ist scharf wenn

$$\sqrt{j W(u_j)} = \frac{1}{\sqrt{j}} u_j'$$

$$\Rightarrow u_j' = j \sqrt{W(u_j)} = j u_j (1 - u_j)$$

Betrachte die DGL

$$\begin{cases} v' = j v (1 - v) \\ v(t_0) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Lösung der DGL:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t \frac{v'}{v(1-v)} &= j(t - t_0) \\ \Rightarrow \int_{1/2}^{v(t)} \frac{1}{s(1-s)} &= j(t - t_0) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \gamma(t-t_0) = \int_{\frac{1}{2}}^{v(t)} \frac{1}{s(1-s)} ds$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{v(t)} \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{1-s} \right) ds$$

$$= \log|v(t)| - \log|1-v(t)| \\ - \left(\log\left|\frac{1}{2}\right| - \log\left|-\frac{1}{2}\right| \right)$$

$$\Rightarrow \gamma(t-t_0) = \log \left| \frac{v(t)}{1-v(t)} \right|$$

$$\stackrel{ve(q_1)}{\Rightarrow} \frac{v(t)}{1-v(t)} = e^{\gamma(t-t_0)}$$

$$\Rightarrow v(t) = e^{\gamma(t-t_0)} (1-v(t))$$

$$\Rightarrow v(t) = \frac{e^{\gamma(t-t_0)}}{1+e^{\gamma(t-t_0)}}$$

Beh:

$$(i) \quad u_j(t) := \frac{e^{j(t-t_0)}}{1+e^{j(t-t_0)}} \xrightarrow{L^1(a,b)} u$$

und

$$(ii) \quad F_j(u_j) \longrightarrow F(u) = \frac{1}{3}$$

Beweis

$$(i) \quad u_j \longrightarrow u \quad \text{pktw für} \\ \text{(Wannlich auf } (a,b) \setminus \{t_0\})$$

und

$$|u_j| \leq 1 \implies u_j \text{ ist majorisiert in } L^1(a,b)$$

$$\implies u_j \longrightarrow u \text{ in } L^1(a,b),$$

$$(ii) \quad F_j(u_j) = \int_a^b \frac{1}{j} |u_j'|^2 + j W(u_j) \, dx$$

$$\underbrace{W(u_j) = \frac{1}{2} |u_j'|^2}_{\text{}} \quad 2 \int_a^b \frac{1}{j} |u_j'|^2 \, dx$$

$$= 2 \int_a^b \frac{1}{j} \left(\frac{je^{j(t-t_0)}}{1+e^{j(t-t_0)}} - \frac{je^{2j(t-t_0)}}{(1+e^{j(t-t_0)})^2} \right)^2 dt$$

$$= 2 \int_a^b \frac{1}{j} \left(j \frac{e^{j(t-t_0)}}{(1+e^{j(t-t_0)})^2} \right)^2 dt$$

$$= 2 j \int_a^b \frac{e^{2j(t-t_0)}}{(1+e^{j(t-t_0)})^4} dt$$

$$= 2 \int_a^b j e^{j(t-t_0)} \frac{e^{j(t-t_0)}}{(1+e^{j(t-t_0)})^4} dt$$

$$= 2 \int_{e^{j(a-t_0)}}^{e^{j(b-t_0)}} \frac{u}{(1+u)^4} du$$

$$\longrightarrow 2 \int_0^\infty \frac{u}{(1+u)^4} du$$

$$= 2 \int_0^\infty \left(\frac{1}{(1+u)^3} - \frac{1}{(1+u)^4} \right) du$$

$$= 2 \left[-\frac{1}{2} \frac{1}{(1+u)^2} + \frac{1}{3} \frac{1}{(1+u)^3} \right]_0^\infty = 2 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{3} = F(u)$$