Cheat Sheet

Der Satz von Gauß und seine Verallgemeinerungen

(i) Analysis-3-Version

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes, C^1-glatt berandetes Gebiet und $f \in C^1(\overline{\Omega})$

Dann gilt $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$

$$\int_\Omega \partial_i f \, dx = \int_{\partial\Omega} f \nu_i \, dS$$

wobei ν_i die i-te Komponente der äußeren Normalen ist

Korollar

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt, C^1-glatt und $f \in C^1(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^n)$. Dann gilt

$$\int_\Omega \operatorname{div}(f) \, dx = \int_{\partial\Omega} \langle f, \nu \rangle \, dS$$

(ii) Allgemeiner Rand

Methode: Evans Gariepy Satz 1 in Abschnitt 5.8

(A) Definition (Gebietsnormale)

Es habe $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ Lipschitz-Rand

d.h $\forall x_0 \in \Omega\ \exists U \subset \mathbb{R}^n$ Umgebung von x_0

$\exists V \subset \mathbb{R}^{n-1}$ Umgebung von einem $y_0 \in$ ~~$\mathbb{R}^{n-1}$~~ V

$\exists$ $\mathcal{O}$ orthogonale $n \times n$ – Matrix.

$\exists g: V \to \mathbb{R}$. Lipschitz (d.h $W^{1,\infty}(V)$) sodass

$\mathcal{O}(U \cap \Omega) = \{(x, g(x)) \mid x \in V\}$

und ~~$(y_0, g(y_0))$~~ $= \mathcal{O}^{-1}((y_0, g(y_0)) = x_0$.

Dann gibt es genau eine Abbildung

$\nu : \partial\Omega \to \mathbb{R}^n$ die messbar(*) ist und

für alle $U, V, \mathcal{O}, g$ wie oben gilt

$$\nu(\mathcal{O}^{-1}(x, g(x))) = \mathcal{O}^{-1}\left(\frac{(\nabla g(x), -1)}{\sqrt{1 + |\nabla g(x)|^2}}\right)$$

fast überall für $x \in V$

Hiermit ist die Schwache Ableitung gemeint.

Dieses ν heißt äußere Normale

(*) Messbar bezüglich des Oberflächenmaßes, welches wir hier nicht definiert haben, siehe Arendt-Urban Kapitel 7

(B) Der Satz von Gauß für glatte Funktionen mit Lipschitz-Gebiet.

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mit Lipschitz-Rand

Dann gilt für alle $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$

$$\int_\Omega \partial_i \varphi \, dx = \int_{\partial\Omega} \varphi \, \nu^i \, dS$$

wobei ν wie in (A)

(iii) Allgemeinere Funktionen

<u>Satz</u> (Arendt-Urban Kapitel 7)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mit Lipschitz-Rand und $f \in W^{1,2}(\Omega)$. Dann gibt es $g \in W^{1,2}(\mathbb{R}^n)$: $g|_\Omega = f$ fü.

Beachte nun: $W^{1,2}(\mathbb{R}^n) = W_0^{1,2}(\mathbb{R}^n)$.

und wähle $(\varphi_n) \subset W^{1,2}(\mathbb{R}^n) \cap C_c^1(\mathbb{R}^n)$:

$$\varphi_n \longrightarrow g \quad \text{in } W^{1,2}(\mathbb{R}^n)$$

tr ist der Spuroperator aus den Übungen

Damit $\varphi_n|_{\partial\Omega} = tr_\Omega(\varphi_n) \xrightarrow[\text{da } \varphi_n \to f \text{ in } W^{1,2}(\Omega)]{\text{in } L^2(\partial\Omega)} tr_\Omega(f)$

Nun sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mit Lipschitz-Rand

$$\int_\Omega \partial_i f \, dx = \int_\Omega \partial_i g \, dx = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \partial_i \varphi_n \, dx$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_{\partial\Omega} (\varphi_n|_{\partial\Omega}) \, \nu^i \, dx$$

$$= \int_{\partial\Omega} tr_\Omega(f) \, \nu^i \, dx$$

$\Longrightarrow$ Satz von Gauß für Sobolev-Funktionen und Gebiete mit Lipschitz-Rand

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mit Lipschitz Rand (und beschränkt). Dann $\forall f \in W^{1,2}(\Omega), \forall i = 1, \dots n$

$$\int_\Omega \partial_i f \, dx = \int_{\partial\Omega} tr(f) \, \nu^i \, dS$$

wobei ν die äußere Normale