BEWEIS VON PROPOSITION 3.3

Theorem 0.1. *Es sei Ω eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ und $p \in (1, \infty)$. Seien $(f_j), f : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ so, dass*

- *Für jedes $\xi \in \mathbb{R}^n$ ist $f_j(\cdot, \xi), f(\cdot, \xi)$ Lebesgue-Borel-messbar.*
- *Für fast alle $x \in \Omega$ ist $f_j(x, \cdot), f(x, \cdot)$ konvex auf $\mathbb{R}^n$.*
- *Es gibt eine Konstante $c_1 \geq 0$ sodass*
$$0 \leq f(x, \xi), f_j(x, \xi) \leq c_1(1 + |\xi|^p)$$
für fast alle $x \in \Omega$ und alle $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Sei dazu für jedes $\xi \in \mathbb{R}^n$ $(f_j(\cdot, \xi))$ punktweise fast überall gegen $f(\cdot, \xi)$ konvergent. Dann definiert

$$F_j(u) := \int_\Omega f_j(x, Du(x))dx \quad (j \in \mathbb{N}) \tag{0.1}$$

eine Folge, die in der schwachen Topologie von $W^{1,p}(\Omega)$ Γ-konvergent ist gegen

$$F(u) := \int_\Omega f(x, Du(x))dx. \tag{0.2}$$

Ab sofort seien f_j, f, p, Ω wie in den Vorraussetzungen von Theorem 0.1.

Lemma 0.2. *(Die limsup-inequality) Es gilt stets für alle $u \in W^{1,p}(\Omega)$*

$$F(u) = \lim_{j \to \infty} F_j(u). \tag{0.3}$$

Insbesondere ist $u_j \equiv u$ eine recovery sequence für u.

Proof. Die Funktionenfolge $(f_j(\cdot, Du(\cdot)))_{j \in \mathbb{N}}$ konvergiert punktweise fast überall gegen $f(\cdot, Du(\cdot))$. Ferner gilt

$$|f_j(x, Du(x))| \leq c_1(1 + |Du(x)|^p) \tag{0.4}$$

und daher hat die Folge eine integrierbare Majorante. Die Behauptung folgt mit dem Satz von Lebesgue. $\square$

Lemma 0.3. *(Der Hilfssatz: Konvexität und Lipschitz-Eigenschaft) Es sei $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konvex. Seien $R' > r' > 0$ und $M := \sup_{B_{R'}(0)} g$ und $m := \inf_{B_{R'}(0)} g$. Dann gilt*

$$|g(x) - g(y)| \leq \frac{M - m}{R' - r'}|x - y| \quad \forall x, y \in B_{r'}(0) \tag{0.5}$$

Insbesondere ist g Lipschitzstetig auf $B_{r'}(0)$, liegt somit in $W^{1,\infty}(B_{r'}(0))$ und erfüllt

$$||\nabla g||_{\infty, B_{r'}(0)} \leq \sqrt{n}\frac{M - m}{R' - r'} \tag{0.6}$$

Proof. Übungsaufgabe 46 zusammen mit dem Satz von Rademacher. $\square$

Lemma 0.4. *Zu jedem $\epsilon > 0$ und $R > 0$ gibt es eine Lebesgue messbare Menge $A_{\epsilon,R}$ mit $|A_{\epsilon,R}| < \epsilon$ und $N = N_{\epsilon,R} \in \mathbb{N}$ derart, dass für alle $j \geq N$*

$$|f_j(x, \xi) - f(x, \xi)| < \epsilon \quad \forall (x, \xi) \in (\Omega \setminus A_\epsilon) \times B_R(0) \tag{0.7}$$

Proof. Seien $\epsilon, R > 0$. Dann gibt es $M \in \mathbb{N}$ und $\xi_1, ..., \xi_M \in B_R(0)$ derart, dass

$$B_R(0) \subset \bigcup_{i=1}^{M} B_{\frac{\epsilon}{3c_1[(R+1)^p+1]}}(\xi_i) \tag{0.8}$$

Nun gibt es nach dem Satz von Egoroff für alle $i \in \{1, ..., M\}$ eine Menge C_i mit $|C_i| \leq \frac{\epsilon}{M}$ sodass $f_j(\cdot, \xi_i)$ gleichmäßig auf $\Omega \setminus C_i$ gegen $f(\cdot, \xi_i)$ konvergiert. Sei $A_\epsilon := \bigcup_{i=1}^{M} C_i$. Sei nun $(x, \xi) \in (\Omega \setminus A_\epsilon) \times B_R(0)$. Dann gibt es ξ_i wie oben sodass $\xi \in B_{\frac{\epsilon}{3c_1[(R+1)^p+1]}}(\xi_i)$. Wir verwenden den Hilfssatz mit $R' = R + 1$ und $r' = R$. Wegen den Vorraussetzungen gilt $M \leq c_1(1 + (R + 1)^p)$ und $m \geq 0$

$$\begin{aligned} |f_j(x, \xi) - f(x, \xi)| &\leq |f_j(x, \xi) - f_j(x, \xi_i)| + |f_j(x, \xi_i) - f(x, \xi_i)| + |f(x, \xi_i) - f(x, \xi)| \\ &\leq 2c_1(1 + (R + 1)^p)|\xi - \xi_i| + \sup_{x \in \Omega \setminus C_i} |f_j(x, \xi_i) - f(x, \xi_i)| \\ &\leq \frac{2}{3}\epsilon + \sup_{x \in \Omega \setminus C_i} |f_j(x, \xi_i) - f(x, \xi_i)| \end{aligned}$$

Wir finden $N_1, ..., N_M \in \mathbb{N}$ sodass $j \geq N_i$ impliziert, dass

$$\sup_{x \in \Omega \setminus C_i} |f_j(x, \xi_i) - f(x, \xi_i)| < \frac{\epsilon}{3} \tag{0.9}$$

Dann leistet $N := \max_{i=1,...,M} N_i$ das Gewünschte. □

Lemma 0.5. *Es sei $(u_j)_{j \in \mathbb{N}}$ eine in $W^{1,p}(\Omega)$ beschränkte Folge. Dann gibt es ein $C > 0$ derart dass*

$$|\{x \in \Omega : |Du_j(x)| \geq R\}| \leq \frac{C^p}{R^p} \tag{0.10}$$

Proof. Es sei $C := \sup_{j \in \mathbb{N}} ||Du_j||_{L^p}$. Wir benutzen die Tschebyscheff-Ungleichung

$$|\{x \in \Omega : |Du_j(x)| \geq R\}| = |\{x \in \Omega : |Du_j(x)|^p > R^p\}| \leq \frac{1}{R^p} \int_\Omega |Du_j|^p dx. \tag{0.11}$$

□

Beweis von Theorem 0.1. Es ist nur noch die liminf-inequality zu zeigen. Hierfür sei $u_j \rightharpoonup u$ schwach in $W^{1,p}(\Omega)$. Sei $q \in (1, \infty)$ so, dass $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ und wie in Lemma 0.5 $C := \sup_{j \in \mathbb{N}} ||Du_j||_{W^{1,p}}$. Seien $\epsilon > 0$ und $0 < \mu \leq \frac{1}{2}$. Wähle $\delta \in (0, \epsilon)$ so, dass

$$|A| < \delta \quad \Rightarrow \quad \int_A |Du|^p dx \leq \epsilon. \tag{0.12}$$

Sei $R > 0$ beliebig so, dass $\frac{C^p}{R^p} < \delta$. Sei $A_{\delta,R}$ wie in Lemma 0.4 und

$$G_\mu := (\Omega \setminus A_{\delta,R}) \cap \{x \in \Omega : |Du(x)| \leq \mu R\} \tag{0.13}$$

Sei nun $j \geq N_{\epsilon,R}$ wie im vorigen Lemma. Definiere

$$L_{j,R} := \{x \in \Omega : |Du_j(x)| < R\}. \tag{0.14}$$

Beachte, dass $|\Omega \setminus L_{j,R}| \leq \frac{C^p}{R^p}$. Im Folgenden schreiben wir salopp

$$L_{j,R}^C := \Omega \setminus L_{j,R} \tag{0.15}$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
\int_\Omega f(x,Du(x))dx &\leq \int_{G_\mu} f(x,Du(x))dx + \int_{A_{\delta,R}} f(x,Du(x))dx \\
&\quad + \int_{|Du|\geq \mu R} f(x,Du(x))dx \\
&\leq \int_{G_\mu} f(x,Du(x))dx + c_1\left(|A_{\delta,R}| + \int_{A_{\delta,R}} |Du|^p dx\right) \\
&\quad + \int_{|Du|\geq \mu R} f(x,Du(x))dx \\
&\leq \int_{G_\mu} f(x,Du(x))dx + c_1(\delta+\epsilon) \\
&\quad + \int_{|Du|\geq \mu R} (1+|Du|^p)dx,
\end{aligned}$$

und damit

$$F(u) = \int_\Omega f(x,Du(x))dx \leq \int_{G_\mu} f(x,Du(x))dx + 2c_1\epsilon + \int_{|Du|\geq \mu R}(1+|Du|^p)dx$$

Nun betrachte

$$\begin{aligned}
\int_{G_\mu} f(x,Du(x))dx &= \int_{G_\mu\cap L_{j,R}} f(x,Du(x))dx + \int_{G_\mu \cap L_{j,R}^C} f(x,Du(x))dx \\
&\leq \int_{G_\mu\cap L_{j,R}} f(x,Du(x))dx + c_1\int_{L_{j,R}^C}(1+|Du|^p)dx \\
&\leq \int_{G_\mu\cap L_{j,R}} f(x,Du(x))dx + c_1\left(\frac{C^p}{R^p}+\epsilon\right),
\end{aligned}$$

wobei wir benutzt haben dass laut Lemma 0.5 $|L_{j,R}^C| \leq \frac{C^p}{R^p} < \delta$. Weiterhin gilt

$$\begin{aligned}
\int_{G_\mu\cap L_{j,R}} f(x,Du(x))dx &= \int_{G_\mu\cap L_{j,R}} f(x,Du(x)) - f(x,Du_j(x))dx \\
&\quad + \int_{G_\mu\cap L_{j,R}} f(x,Du_j(x))dx \\
&\leq \int_{G_\mu\cap L_{j,R}} f(x,Du(x)) - f(x,Du_j(x))dx + \epsilon|\Omega| \\
&\quad + \int_\Omega f_j(x,Du_j(x))dx \\
&\leq \int_{G_\mu\cap L_{j,R}} -\nabla f(x,Du(x))(Du_j(x)-Du(x))dx \\
&\quad +\epsilon|\Omega| + \int_\Omega f_j(x,Du_j(x))dx.
\end{aligned}$$

Wir formen um, damit wir die schwache Konvergenz benutzen können

$$\begin{aligned}\int_{G_\mu \cap L_{j,R}} f(x, Du(x))dx &= \int_{G\mu} -\nabla f(x, Du(x))(Du_j(x) - Du(x))dx \\ &\quad - \int_{G_\mu \cap L_{j,R}^C} -\nabla f(x, Du(x))(Du_j(x) - Du(x))dx \\ &\quad + \epsilon|\Omega| + \int_\Omega f_j(x, Du_j(x))dx.\end{aligned}$$

Nun gilt nach dem Hilfssatz mit $R' = 2\mu R$ und $r' = \mu R$

$$\begin{aligned}\left|\int_{G_\mu \cap L_{j,R}^C} \nabla f(x, Du(x))(Du_j(x) - Du(x))dx\right| &\leq ||\nabla f(\cdot, Du(\cdot)||_{L^q(G_\mu \cap L_{j,R}^C)}||Du_j - Du||_{L^p(\Omega)} \\ &\leq 2C||\nabla f(\cdot, Du(\cdot)||_{L^\infty(G_\mu)}|L_{j,R}|^{\frac{1}{q}} \\ &\leq 2C^{\frac{p}{q}+1}\frac{1}{R^{\frac{p}{q}}}\sqrt{n}\frac{c_1(1+(2\mu R)^p)}{2\mu R - \mu R} \\ &= 2C^p\sqrt{n}c_1\frac{1+(2\mu R)^p}{\mu R^p}\end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt benutzt haben, dass $\frac{p}{q} = p - 1$. Damit gilt

$$\begin{aligned}\int_{G_\mu \cap L_{j,R}} f(x, Du(x))dx &\leq 2C^p\sqrt{n}c_1\frac{1+(2\mu R)^p}{\mu R^p} + \epsilon|\Omega| + \int_\Omega f_j(x, Du_j(x))dx \\ &\quad + \int_\Omega -\nabla f(x, Du(x))\chi_{G_\mu}(x)(Du_j(x) - Du(x))dx.\end{aligned}$$

Alles in Allem:

$$\begin{aligned}\int_{G_\mu} f(x, Du(x))dx &\leq 2C^p\sqrt{n}c_1\frac{1+(2\mu R)^p}{\mu R^p} + \epsilon|\Omega| + \int_\Omega f_j(x, Du_j(x))dx \\ &\quad + \int_\Omega -\nabla f(x, Du(x))\chi_{G_\mu}(x)(Du_j(x) - Du(x))dx \\ &\quad + c_1\left(\frac{C^p}{R^p} + \epsilon\right)\end{aligned}$$

Lassen wir nun zunächst j gegen ∞ laufen. Dann gilt wegen der schwachen Konvergenz, da

$$\nabla f(\cdot, Du(\cdot))\chi_{G_\mu} \in L^\infty(\Omega) \subset L^q(\Omega)$$

$$\int_{G_\mu} f(x, Du(x))dx \leq \liminf_{j\to\infty}\int_\Omega f_j(x, Du_j(x))dx + 2C^p\sqrt{n}c_1\frac{1+(2\mu R)^p}{\mu R^p} + \epsilon|\Omega| + c_1\left(\frac{C^p}{R^p} + \epsilon\right)$$

Weiter gilt

$$F(u) \leq 2c_1\epsilon + \int_{|Du|\geq\mu R}(1+|Du|^p)dx + \liminf_{j\to\infty} F_j(u_j) + 2C^p\sqrt{n}c_1\frac{1+(2\mu R)^p}{\mu R^p} + \epsilon|\Omega| + c_1\left(\frac{C^p}{R^p} + \epsilon\right)$$

Lassen wir nun $R \to \infty$ gehen. Es folgt

$$F(u) \leq (|\Omega| + 3c_1)\epsilon + 2^{p+1}C^p\mu^{p-1} + \liminf_{j\to\infty} F_j(u_j)$$

Mit der Annahme, dass $p > 1$ können wir μ gegen 0 gehen lassen und erhalten

$$F(u) \leq (|\Omega| + 3c_1)\epsilon + \liminf_{n\to\infty} F_j(u_j) \tag{0.16}$$

Schlussendlich folgt die Behauptung mit $\epsilon \to 0$. □

Remark 0.6. In dem Beweisversuch, den wir in der Vorlesung gezeigt haben, waren eigentlich alle Argumente vorhanden, bis auf die Einführung des Parameters μ. Unser Beweis ist gescheitert, da wir von vorneherein $\mu = 1$ gewählt haben. Zwar gehen R und μR beide gegen unendlich, jedoch unterschiedlich schnell. Insbesondere liegen für kleine μ und $x \in G_\mu \cap L_{j,R}^C$ die Größen $|Du|$ und $|Du_j|$ sehr weit auseinender. Dass dieses "sehr weit auseinander liegen" im Beweis nur eher implizit eine Rolle spielt, ist nicht verwunderlich, denn schließlich hat man nur schwache Konvergenz und daher eigentlich keinerlei Kontrolle. Die Kontrolle für die schwache Konvergenz bekommen wir hier mal wieder nur mit der Gradientenabschätzung für konvexe Funktionen.