Universität Ulm

Abgabe: Dienstag, 06.02.2017

Prof. Dr.Anna Dall'Acqua
Marius Müller
Wintersemester 2017/18
Punktzahl: keine

Übungen Variationsrechnung: Blatt 12

45. (Kompaktheit der Γ-Konvergenz)

Es sei (X, d) ein separabler metrischer Raum. Dazu sei $(F_j : X \to \overline{\mathbb{R}})_{j\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionalen. Zeige: Dann gibt es eine Teilfolge $(F_{j_k})_{k\in\mathbb{N}}$ die Γ-konvergent ist.
Hinweis: Es sei $\{z_k| \in \mathbb{N}\}$ eine abzählbare dichte Teilmenge in X. Zeige: Zu jedem $m \in \mathbb{N}$ und jedem $k \in \mathbb{N}$ gibt es eine Teifolge $(\sigma_j^{m,k})_{j\in\mathbb{N}}$ so, dass

$$\lim_{j\to\infty} \inf_{y\in B_{\frac{1}{m}}(z_k)} F_{\sigma_j^{m,k}}(y) \tag{1}$$

in $\overline{\mathbb{R}}$ eigentlich oder uneigentlich existert. Verwende Diagonalfolgenargumente um eine Teilfolge $(\sigma_l)_{l\in\mathbb{N}}$ zu finden sodass für alle $m, k \in \mathbb{N}$

$$\lim_{l\to\infty} \inf_{y\in B_{\frac{1}{m}}(z_k)} F_{\sigma_l}(y) \tag{2}$$

in $\overline{\mathbb{R}}$ eigentlich oder uneigentlich existert. Setze

$$F_\infty(x) := \sup_{m\in\mathbb{N}} \inf_{k\in\mathbb{N}\,:\, x\in B_{\frac{1}{m}}(z_k)} \lim_{l\to\infty} \inf_{y\in B_{\frac{1}{m}}(z_k)} F_{\sigma_l}(y) \tag{3}$$

und zeige dass F_{σ_l} gegen F_∞ Γ-konvergiert.

46. (Der Hilfssatz in Proposition 3.3, Konvexität und Lipschitzstetigkeit)

(a) Zeige (oder vergewissere dich, dass du es weißt): Es sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ konvex und beschränkt und $[c, d] \subset (a, b)$. Definiere $M := \sup_{x\in(a,b)} f(x)$ und $m := \inf_{x\in(a,b)} f(x)$. Definiere $\delta := \min(c - a, b - d)$. Zeige: Für alle $x, y \in [c, d]$ gilt

$$|f(x) - f(y)| \le \frac{M - m}{\delta}|x - y| \tag{4}$$

(b) Es sei X ein normierter Raum, $x_0 \in X$ und $R > 0$ sowie $r \in (0, R)$. Sei dazu $f : B_R(x_0) \to \mathbb{R}$ konvex und beschränkt. Zeige: dann gilt für $M := \sup_{B_R(x_0)} f$ und $m := \inf_{B_r(x_0)} f$, dass

$$|f(x) - f(y)| \le \frac{M - m}{R - r}|x - y| \quad \forall x, y \in B_r(x_0) \tag{5}$$

47. (Der Modica-Mortola Trick und ein singulärer Grenzprozess für die Beschreibung von Phasenübergängen)

Wir betrachten ein Modell, welches wir in der Einführung bereits gesehen haben: Ein chemisches Element sei schwerelos in einem Röhrchen gefangen, das wir hier als das beschränkte Intervall (a, b) beschreiben wollen. Das Element ist nun teils in flüssigem Zustand und teils in gasförmigem Zustand vorhanden. Für $x \in (a, b)$ stellen wir uns $u(x) \in [0, 1]$ als (Lebesgue-messbare) Dichte vor, die angibt, wie viel der Flüssigkeit in einer Umgebung des Ortes x vorliegt. Das Modell ist zeitunabhängig, daher ändert sich nicht, wie viel Flüssigkeit und wie viel Gas insgesamt vorhanden sind. Insbesondere bleibt daher die Masse des flüssigen Teils erhalten. Das heißt es gibt eine Konstante m, sodass gilt

$$m = \int_a^b u(x)dx \tag{6}$$

Für den Moment vernachlässigen wir diese Bedingung aber. Gleichgewichtslösungen sollten eigentlich durch Minimierer der inneren Energie

$$\mathcal{E}(u) := \int_a^b W(u(x))dx \tag{7}$$

wobei $W(\xi) = \xi^2(1-\xi)^2$ ist, gegeben sein. Hierbei treten aber physikalisch unsinnvolle Lösungen auf, denn jede messbare Funktion die Werte nur in $\{0,1\}$ annimmt ist ein Minimierer. Die Cahn-Hillard-Theorie besagt, dass nur solche Lösungen sinnvoll sind, die die Übergangsschicht zwischen flüssig und gasförmig moglichst klein machen. Es gelang Luciano Modica 1987, diese Bedinung variationell zu verstehen. Für $\epsilon > 0$ definieren wie $F_j : L^1(a,b) \to \mathbb{R}$ durch

$$F_j(u) := \begin{cases} \frac{1}{j}\int_a^b |u'|^2 dx + j\int_a^b W(u)dx & u \in W^{1,2}(a,b),\ u(x) \in [0,1]\ a.e. \\ \infty & \text{sonst.} \end{cases} \tag{8}$$

Wir wollen in dieser Aufgabe zeigen, dass F_j bezüglich der $L^1(a,b)$-Metrik einen Gamma-Limes besitzt und dieser gegeben ist durch

$$F(u) := \begin{cases} \frac{1}{3}\#\{x \in (a,b) | u(x+) \neq u(x-)\} & u \text{ stückweise stetig auf } (a,b) \text{ und } u(x) \in \{0,1\} \text{ fast überall} \\ \infty & \text{sonst} \end{cases} \tag{9}$$

Man beachte: Minimierer von $F(u)$ lösen daher das physikalische Problem und führe sich vor Augen, wie solche Minimierer mithilfe das Hauptsatzes über Γ-Konvergenz gefunden werden können.

(a) Es sei $(u_j) \subset W^{1,2}(a,b)$ so, dass $\sup_{j\in\mathbb{N}} F_j(u_j) < \infty$. Zeige, dass für alle $\eta \in (0, \frac{1}{2})$ das Maß der Menge $I_j^\eta := \{x \in (a,b) | \eta < u_j(x) < 1-\eta\}$ für $j \to \infty$ gegen 0 konvergiert.
Hinweis: Beobachte, dass

$$I_j^\eta = \{x \in (a,b) |\ W(u_j(x)) > W(\eta)\}. \tag{10}$$

(b) Es sei (u_j) wie in Teilaufgabe (a). Zeige: konvergiert u_j in der $L^1(a,b)$-Metrik gegen ein $u \in L^1(a,b)$, so gilt $u \in \{0,1\}$ fast überall.

(c) Es sei $(u_j) \subset W^{1,2}(a,b)$ so, dass $\sup_{j\in\mathbb{N}} F_j(u_j) < \infty$. Wir nennen $I = (c,d)$ ein Übergangsintevall für u_j, falls $u_j(c), u_j(d) \in \{\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\}$ und $u_j(x) \in \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$ für alle $x \in (c,d)$. Vergewissere dich zunächst, dass es nur höchstens abzählbar viele Übergangsintervalle geben kann. Sei A_j die Vereinigung aller Übergangsintervalle für u_j. Zeige: Dann gibt es $N_j \in \mathbb{N}$ derart, dass

$$A_j = \bigcup_{k=1}^{N_j} (a_k^j, b_k^j) \tag{11}$$

für paarweise disjunkte Intervalle (a_k^j, b_k^j). Außerdem gilt: (N_j) definiert eine beschränkte Folge in $\mathbb{N}$.
Hinweis: Da u_j stetig ist, ist A_j offen und somit Vereinigung von höchstens abzählbar vielen Intervallen. Wären es nun unendlich viele Intervalle so gäbe eseine abzählbare Folge $a < s_1 < t_1 < s_2 < t_2 < s_3 < t_3 < ... < b$ derart, dass $u_j(s_k) = \frac{1}{4}$ und $u_j(t_k) = \frac{3}{4}$. Nun findet man

$$F_j(u_j) \geq \sum_{k=1}^\infty \int_{s_k}^{t_k} \left(\frac{1}{j}|u_j'|^2 + jW(u_j)\right) dx \geq 2\sum_{k=1}^\infty \int_{s_k}^{t_k} u_j'\sqrt{W(u_j)}. \tag{12}$$

nach einer Substitution vereinfacht sich die Ungleichung zu

$$F_j(u_j) \geq 2\sum_{k=1}^\infty \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} \sqrt{W(z)}dz = \infty \tag{13}$$

(d) Es sei nun u_j wie in (c). Zeige: Dann gibt es eine Teilfolge (u_{l_j}) sodass $N_{l_j} \equiv N$ konstant ist und dass für alle $k = 1, ..., N$ $(a_k^{l_j})_{j\in\mathbb{N}}$ und $(b_k^{l_j})_{j\in\mathbb{N}}$ konvergente Folgen sind. Schließe mit Aufgabenteil (a), dass für alle $k = 1, ..., N$ gilt

$$\lim_{j\to\infty} a_k^{l_j} = \lim_{j\to\infty} b_k^{l_j} =: a_k \tag{14}$$

Hinweis Bolzano-Weierstraß und Teilaufgabe (a) mit $\eta = \frac{1}{4}$.

(e) Es sei u_j wie in (c) so, dass $u_j \to u$ in $L^1(a,b)$. Wähle (l_n) , $N, a_1, ..., a_N$ so wie in Aufgabe (d) und definiere

$$A := \{a_1, ..., a_N\} \tag{15}$$

Zeige: u ist stetig auf $(a,b) \setminus A$.
Hinweis: Es gibt eine Teilfolge der (u_j) die auch punktweise fast überall konvergiert. Sie

konvergiere etwa auf $(a,b)\setminus M$ wobei M eine Lebesgue-Nullmenge ist. Wir behaupten, dass für $t = 1, .., N-1$ u fast überall konstant auf (a_i, a_{i+1}) ist. Angenommen es gäbe $a_i < s < t < a_{i+1}$ sodasss $u(s) = 0$ und $u(t) = 1$ [oder andersherum]. Wähle die Folge (l_j) wie in (d). Beobachte, dass es für alle $j \in \mathbb{N}$ ein $\xi_{l_j} \in (s,t)$ geben muss sodass $\xi_{l_j} \in A_{l_j}$. Folgere, dass eine Teilfolge dieser ξ_{l_j} gegen ein $\xi \in A$ konvergiert. Folgere einen Widerspruch dazu dass $[s,t] \cap A = \emptyset$.

(f) Zeige die liminf-Inequality.
Hinweis: Eine Abschätzung wie in Gleichung (12) kann hilfreich sein.

(g) Es sei

$$u(t) := \begin{cases} 0 & a < t \le t_0 \\ 1 & t_0 < t < b \end{cases}. \tag{16}$$

Konstruiere eine recovery sequence für u.
Hinweis: Die Ungleichung in (12) wurde im Beweis der liminf inequality verwendet und ist scharf falls $u_j' = j\sqrt{W(u_j)}$. Betrachte geeignete Lösungen dieser DGL.
Anmerkung: Für allgemeine u werden wir aufgrund des erhöhten notationsmäßigen Aufwandes keine recovery sequence konstruieren. Die Konstruktion in dem vorhandenen Spezialfall sollte aber Aufschluss darüber geben, wie die Konstruktion im Allgemeinen funktioniert.