Cheat Sheet

Sobolevraume $\Omega \subset \mathbb{R}^n$

$u \in L^1_{loc}(\Omega)$ schwach diffbar, falls

$\forall j = 1 \ldots n \; \exists \underbrace{v_j}_{=: D_{x_j} u} \in L^1_{loc}(\Omega)$:

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \quad \int_\Omega u \, \partial_{x_j} \varphi \, dx = - \int v_j \varphi \, dx$$

$u \in W^{1,p}(\Omega) :\Leftrightarrow u, D_{x_j} u \in L^p(\Omega) \; \forall j = 1 \ldots n$

$u \in W^{k,p}(\Omega) :\Leftrightarrow u, D_{x_j} u \in W^{k-1,p}(\Omega) \; \forall j = 1 \ldots n$.

$\|u\|_{W^{k,p}} :=$

Sobolevraume in 1-D

$\Omega = (a, b)$

$u \in W^{1,p}_{loc}(\Omega) :\Leftrightarrow$

~~$u(x) = u(a$~~

$$u(x) - u(y) = \int_x^y v(s) \, ds$$

fur ein $v \in L^1_{loc}(\Omega)$

Es gilt dann $v = u'$ schwach

Die schwache Ableitung ist eindeutig und es gilt stets fur $u \in W^{2,p}(\Omega)$

$$D_{x_k}(D_{x_j} u) = D_{x_j}(D_{x_k} u)$$

$\rightsquigarrow$ Multiindexschreibweise.

$W^{k,p}(\Omega)$ mit Norm

$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} := \|u\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{j=1}^n \|D_{x_j} u\|_{L^p(\Omega)}$

und

$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} := \sum_{|\alpha| \le k} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}$

$u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$

fur fast alle $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$

$u(x', \cdot) \in W^{1,p}(\mathbb{R})$

Approximation ~~von Funken~~ durch $C_c^\infty(\Omega)$

$\Omega = \mathbb{R}^n$ $\quad \overline{C_0^\infty(\mathbb{R}^n)}^{\|\cdot\|_{W^{k,p}}} = W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$

Ω beschränkt $\quad$ Poincaré-Ungleichung $\Rightarrow \overline{C_c^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{W^{k,p}}} \neq W^{k,p}(\Omega)$

Ω beschränkt $\quad \exists\, tr: \cancel{L^2(\partial\Omega)} \longrightarrow$

C^1-Rand $\quad tr \in \mathcal{L}(W^{1,2}(\Omega) \to L^2(\partial\Omega))$

$$tr(\varphi) = \varphi|_{\partial\Omega} \quad \forall \varphi \in W^{1,2}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$$

~~$tr(W^1$~~

$$W_0^{1,2}(\Omega) = \{u \in W^{1,2}(\Omega) \mid tr(u) = 0\}.$$

~~Verbandseigenschaft von $W^{1,p}$~~

Poincaré-Ungleichung für $W^{1,p}(\Omega)$

$\forall p \in [1,\infty]\ \forall \Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschr. Gebiet

$\exists\, C = C(\Omega) > 0$

$$\left\| u - \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u(y)\,dy \right\|_{L^p(\Omega)} \le C \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$$

Poincaré Ungleichung für $W_0^{1,p}(\Omega)$

$\forall p \in [1,\infty]\ \forall \Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt

~~ob~~ $\exists\, C = C(\Omega) > 0$

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \le C \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$$

~~$W_0^{1,p}$ in 1-D~~

$C\ tr$

~~Approximat~~

$W_0^{1,p}(\Omega)$ vs $C(\bar{\Omega})$

$u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C_0(\bar{\Omega}) \Rightarrow u \in W_0^{1,p}(\Omega)$

Verbandseigenschaft von $W^{1,p}(\Omega)$

$u, v \in W^{1,p}(\Omega)$ $\quad \max(u,v) \in W^{1,p}(\Omega)$

$\boxed{0 \le u \in W_0^{1,p}(\Omega),\ v \in W^{1,p}(\Omega)\ \text{fn}\ 0 \le v \le u \Rightarrow v \in W_0^{1,p}(\Omega)}$ $\quad \min(u,v) \in W^{1,p}(\Omega)$

$|u| \in W^{1,p}(\Omega)$

Approximation von außen

$\Omega\ C^1\text{-Rand} \Longrightarrow \overline{W^{1,p}(\Omega) \cap C^1(\mathbb{R}^n)}^{\|\cdot\|_{W^{1,p}}} = W^{1,p}(\Omega)$

Einbettungssätze

Sobolevungleichung

$f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ $\quad p^*: \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$ $\quad (p < n)$

$\|f\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \le \|f\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}$

Sobolev einbettung

besseres q als p

$k < \frac{n}{p}$ $\quad \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{k}{n}$ $\quad W^{k,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^n)$

$k > \frac{n}{p}$ $\quad \cancel{\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{k}{n}}$ $\quad W^{k,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow C^{k - \lfloor \frac{n}{p} \rfloor - 1}(\mathbb{R}^n)$

$\cancel{k - \frac{n}{p} > l}$

$\cancel{k - \lfloor \frac{n}{p} \rfloor \ge 1}$ $\quad k - \frac{n}{p} > 0$ $\quad k - \lfloor \frac{n}{p} \rfloor \in \mathbb{Z}$

$\&\ \ge k - \frac{n}{p} > 0$

$K = \frac{n}{p}$ $\quad W^{k,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^n) \ \forall q \in [p, \infty)$

Lokales Sobolevenbettung

$K < \frac{n}{p}$ $\quad \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{k}{n}$ $\quad W^{k,p}_{loc}(\Omega) \hookrightarrow L^q_{loc}(\Omega)$

$K > \frac{n}{p}$ $\quad W^{k,p}_{loc}(\Omega) \hookrightarrow L^q_{loc}(\Omega)$

$K = \frac{n}{p}$ $\quad W^{k,p}_{loc}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$

Die Sätze gelten alle auch ohne ‚loc' falls Ω C^1-Rand hat

Rellich - Kondrachov $\quad \Omega$ beschränkt C^1 Rand.

Falls $\frac{1}{p} - \frac{k}{n} < \frac{1}{q} - \frac{l}{n}$ und $l < k$

so ist

Variationsrechnung Blatt 2

A5

(a)

$$\left|\int u\varphi' dx\right| \le C\|\varphi\|_{L^p(\mathbb{R})} \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$$

$$\Rightarrow T: C_0^\infty(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$T(\varphi) = \int u\varphi' dx$$

lässt sich auf $L^p(\mathbb{R})$ fortsetzen

$$\Rightarrow T \in L^p(\mathbb{R})' \Rightarrow \exists \; v \in L^q(\mathbb{R})$$

$$T(\varphi) = \int v\varphi \, dx \quad \forall \varphi \in L^p(\mathbb{R})$$

$$\Rightarrow \forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$$

$$\int v\varphi \, dx = T(\varphi) = \int u\varphi' dx$$

(b) $u \in Lip(\mathbb{R})$ sei $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$

$$\int u\varphi' dx = \lim_{n\to\infty} \int u(x) n \left(\varphi(x+\tfrac{1}{n}) - \varphi(x)\right) dx$$

$$= \lim_{n\to\infty} n \left(\int u(x)\varphi(x+\tfrac{1}{n}) dx - \int u(x)\varphi(x) dx\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(n \int u(x-\tfrac{1}{n})\varphi(x) dx - \int u(x)\varphi(x) dx\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int n\left(u(x-\tfrac{1}{n}) - u(x)\right)\varphi(x) dx$$