Variationsrechnung Blatt 2

A5|

(a)

$$\left|\int u\varphi' \, dx\right| \leq C\|\varphi\|_{L^p(\mathbb{R})} \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$$

$$\Rightarrow T : C_0^\infty(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$T(\varphi) = \int u\varphi' \, dx$$

lässt sich auf $L^p(\mathbb{R})$ fortsetzen

$$\Rightarrow T \in L^p(\mathbb{R})' \Rightarrow \exists \; v \in L^q(\mathbb{R})$$

$$T(\varphi) = \int v\varphi \, dx \quad \forall \varphi \in L^p(\mathbb{R})$$

$$\Rightarrow \forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$$

$$\int v\varphi \, dx = T(\varphi) = \int u\varphi' \, dx$$

(b) $u \in Lip(\mathbb{R})$ sei $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$

$$\int u\varphi' dx = \lim_{n\to\infty} \int u(x) n \left(\varphi(x+\tfrac{1}{n}) - \varphi(x)\right) dx$$

$$= \lim_{n\to\infty} n \left(\int u(x)\varphi(x+\tfrac{1}{n}) dx - \int u(x)\varphi(x) \, dx\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(n \int u(x-\tfrac{1}{n})\varphi(x) \, dx - \int u(x)\varphi(x) \, dx\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int n\left(u(x-\tfrac{1}{n}) - u(x)\right)\varphi(x) \, dx$$

$$\leq \limsup_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \frac{|u(x-\frac{1}{n})-u(x)|}{1/n} \int |\varphi(\alpha)|\, d\alpha$$

$$\leq L \int |\varphi(\alpha)|\, dx \quad \Rightarrow \text{Beh.}$$

(c)

$$\int_{\mathbb{R}} u\varphi' = \int_{\mathbb{R}} u \operatorname{div}\varphi \qquad \text{für } \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$$

Sei $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R}) : \|\varphi\|_\infty \leq 1$

$$\int u\varphi' \leq \left|\int u\varphi'\right| = \lim_{\varepsilon\to 0} \int u \, (\overbrace{\varphi * \varphi_\varepsilon}^{\varphi * \varphi_\varepsilon \leq 1})' \, dx$$

$$\leq \int |Du| \; C$$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}} |Du| < \infty$$

(d) Sollte funktionieren :-)

(e) $\int u(y)\, \varphi_\varepsilon(x-y) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ denn

$$\lim_{h\to 0} \int u(y) \left( \frac{\varphi_\varepsilon(x+he_j-y) - \varphi_\varepsilon(x-y)}{h} \right) dx$$

Lebesgue da $\leq \|\varphi_\varepsilon'\|_\infty < M$ $\quad \int u(y) \lim_{h\to 0} \frac{\varphi_\varepsilon(x+he_j-y) - \varphi_\varepsilon(x-y)}{h}\, dy$

$$= \int u(y) \frac{\partial}{\partial x_j} \varphi_\varepsilon(x-y)\, dy$$

Höhere Ableitungen analog.

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \int u(y)\, \varphi_\varepsilon(x-y)\, dy = \int u(y)\, \frac{\partial}{\partial x_i} \varphi_\varepsilon(x-y)$$

$$= \int u(y) \left( -\frac{\partial}{\partial y_i} \varphi_\varepsilon(x-y) \right) dy$$

$$= -\int u(y)\, \partial_{e_i} \underbrace{\varphi_\varepsilon(x-\cdot)}_{\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)}(y)\, dy$$

$$= -\int D_{e_i} u(y)\, \varphi_\varepsilon(x-y)\, dy.$$

$$\| u * \varphi_\varepsilon \|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} u(y)\, \varphi_\varepsilon(x-y)\, dy \right|^p dx$$

$$\le \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_{\mathbb{R}^n} |u(y)|\, \varphi_\varepsilon(x-y)\, dy \right)^p dx$$

$$\le \int_{\mathbb{R}^n} \left| \left( \int |u(y)|^p \varphi_\varepsilon(x-y)\, dy \right)^{\frac{1}{p}} \underbrace{\left( \int \varphi_\varepsilon(x-y)\, dy \right)^{\frac{1}{q}}}_{=1} \right|^p dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |u(y)|^p \varphi_\varepsilon(x-y)\, dy\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} |u(y)|^p \left( \int \varphi_\varepsilon(x-y)\, dx \right) dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} |u(y)|^p\, dy.$$

Es gilt auch

$$\|u*\varphi_\varepsilon\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}$$

denn

$$\|u*\varphi_\varepsilon\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} = \|u*\varphi_\varepsilon\|_{\cancel{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}\,L^p(\mathbb{R}^n)} + \sum_{j=1}^n \|D_j(u*\varphi_\varepsilon)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

$$\leq \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \sum_{j=1}^n \|D_j u*\varphi_\varepsilon\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

$$\leq \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \sum_{j=1}^n \|D_j u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

$$= \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}.$$

$$\|u*\varphi_\varepsilon - u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} = \|u*\varphi_\varepsilon - u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \sum_{j=1}^n \|D_j(u*\varphi_\varepsilon - u)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

$$= \|u*\varphi_\varepsilon - u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \sum_{j=1}^n \|D_j u*\varphi_\varepsilon - D_j u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

$$\Longrightarrow 0 \quad (\varepsilon \to 0)$$

Das ~~Einzige~~ Einzige, was schiefgeht, ist $\partial_j(u*\varphi_\varepsilon) = D_j u * \varphi_\varepsilon$.

(g) $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt, $C^2$-Rand.

$$\| \hat{i}(u) * \varphi_\varepsilon \big|_\Omega - u \|_{W^{1,p}(\Omega)}$$

$$\leq \| i(u) * \varphi_\varepsilon - i(u) \|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \longrightarrow 0.$$

A6

(a) $P(\Omega, \Omega)$

$$= \sup_{\substack{\varphi \in C_c^1(\Omega) \\ \|\varphi\|_\infty \leq 1}} \int_\Omega \chi_\Omega \operatorname{div} \varphi \, dx$$

$$= \sup_{\substack{\varphi \in C_c^1(\Omega) \\ \|\varphi\|_\infty \leq 1}} \int_\Omega \operatorname{div} \varphi \, dx$$

$$= \sup_{\substack{\varphi \in C_c^1(\Omega) \\ \|\varphi\|_\infty \leq 1}} \sum_{i=1}^n \underbrace{\int_\Omega \partial_{x_i} \varphi_i \, dx}_{= 0}$$ (schwache Abl der Eins)

$$= 0.$$

(b) $\{ \varphi \in C_c^1(\Omega_1) \mid \|\varphi\|_\infty \leq 1 \} \subseteq \{ \varphi \in C_c^1(\Omega_2) \mid \|\varphi\|_\infty \leq 1 \}$

$<$ kann gelten falls $|\Omega_2 \setminus \Omega_1| = 0$ Beweis

$\Omega_2 = (0,1)$ $\quad \Omega_1 = (0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1)$ $\quad E = (0, \frac{1}{2})$

$P(E, \Omega_1) = 0$ $\quad P(E, \Omega_2) \geq 1$

(c) ~~Siehe Vorlesung~~

$n=2$

$E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y\geq 0\}$ $C^2$-glatt berandet

Sei $\Omega$ beschränkt

$\Rightarrow P(E,\Omega) = \mathrm{Vol}_1(\partial E\cap\Omega) \leq \sup_{(x,y)\in\Omega} x - \inf_{(x,y)\in\Omega} x < \infty$

Aber

$P(E,\mathbb{R}^n) \geq P(E, B_R(0)) = \mathrm{Vol}_1(\partial E\cap B_R(0)) = 2R \to \infty$

für $R\to\infty \Rightarrow P(E,\mathbb{R}^n)=\infty$

(d)

Es gilt $\forall \varphi\in C_c^1(\Omega)$

$$\int_\Omega \chi_E \operatorname{div}\varphi = -\int_\Omega (1-\chi_E)\operatorname{div}\varphi = \int_\Omega \chi_{\Omega\setminus E} \operatorname{div}(-\varphi)$$

$\Rightarrow \int \chi_E \operatorname{div}\varphi \leq P(\Omega\setminus E,\Omega) \quad \forall \varphi\in C_c^1(\Omega): \|\varphi\|_\infty\leq 1$

$\Rightarrow P(E,\Omega)\leq P(\Omega\setminus E,\Omega) \quad \forall\varphi\in C_c^1(\Omega) : \|\varphi\|_\infty\leq 1$

(e) Es sei $\varepsilon>0$.

~~Wähle $\varphi_1\in C_c^1(\Omega)$ so~~

sei $\varphi\in C_c^1(\Omega)$

$$\int_{E_1\cup E_2}\operatorname{div}\varphi \leq \int_\Omega \chi_{E_1}\operatorname{div}\varphi + \int_\Omega \chi_{E_2}\operatorname{div}\varphi$$

$$\leq P(E_1,\Omega)+P(E_2,\Omega)$$

$\Rightarrow P(E_1\cup E_2,\Omega)\leq P(E_1,\Omega)+P(E_2,\Omega)$

Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $E_1 \overset{\text{offen}}{\subset} U_1 \subset\subset U_1'$, $E_2 \overset{\text{offen}}{\subset} U_2 \subset\subset U_2'$ so dass $U_1' \cap U_2' = \emptyset$

$\Rightarrow \exists \varphi_1 \in C_0^1(\Omega) : \int_\Omega \chi_{E_1} \operatorname{div} \varphi_1 \geq P(E_1, \Omega) - \varepsilon$

Wähle $\eta_1 \in C_0^\infty(U_1') : \eta_1 \equiv 1$ auf $U_1$, $0 \leq \eta_1 \leq 1$

$\exists \varphi_2 \in C_0^1(\Omega) : \int_\Omega \chi_{E_2} \operatorname{div} \varphi_2 \geq P(E_2, \Omega) - \varepsilon$

Wähle $\eta_2 \in C_0^\infty(U_2') : \eta_2 \equiv 1$ auf $U_2$, $0 \leq \eta_2 \leq 1$

$$\Rightarrow P(E_1, \Omega) + P(E_2, \Omega) - 2\varepsilon$$

$$\leq \int_\Omega \chi_{E_1} \operatorname{div} \varphi_1 + \int_\Omega \chi_{E_2} \operatorname{div} \varphi_2$$

$$= \int_\Omega \chi_{E_1} \eta_1 \operatorname{div} \varphi_1 + \int_\Omega \chi_{E_2} \eta_2 \operatorname{div} \varphi_2$$

$$= \int_\Omega \chi_{E_1} \Big(\operatorname{div}(\eta_1 \varphi_1) + \underbrace{D\eta_1 \, \varphi_1}_{=0 \text{ auf } U_1}\Big) + \int_\Omega \chi_{E_2} \Big(\operatorname{div}(\eta_2 \varphi_2) + \underbrace{D\eta_2 \varphi_2}_{=0 \text{ auf } U_2}\Big)$$

$$= \int_\Omega \chi_{E_1} \operatorname{div} \underbrace{(\eta_1 \varphi_1)}_{\operatorname{supp} \subset U_1'} + \chi_{E_2} \operatorname{div} \underbrace{(\eta_2 \varphi_2)}_{\operatorname{supp} \subset U_2'}$$

$$= \int_\Omega \chi_{E_1 \cup E_2} \operatorname{div} \underbrace{(\eta_1 \varphi_1 + \eta_2 \varphi_2)}_{\| \cdot \|_\infty \leq 1} \, dx$$

$$\leq P(E_1 \cup E_2, \Omega)$$

(f) $E_k \subset E_{k+1} \quad \forall k \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \chi_{E_n} \uparrow \chi_E$$

$$\Rightarrow \chi_{E_n} \to \chi_E \text{ in } L^1_{loc}$$

$$P(E, \Omega) = \int_\Omega |D\chi_E| \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega |D\chi_{E_n}|$$

$$= \liminf_{n\to\infty} P(E_n, \Omega).$$

(g)

$$P(F_n ; \mathbb{R}^n) \Downarrow \inf_{F \in \mu} P(F, \mathbb{R}^n) =: M$$

$\Omega \subset B_R(0)$

$\|\chi_{F_n}\|_{L^1(B_R(0))}$ beschränkt,

$P(F_n, B_R(0)) \leq P(F_n, \mathbb{R}^n) \leq M+1$ beschränkt

$$\Longrightarrow \chi_{F_n} \longrightarrow \cancel{\chi_E} f \quad \text{in } L^1(B_R(0))$$

$f = \chi_{\tilde{E}}$ denn

$$\chi_{F_{n_k}} \longrightarrow \cancel{\chi_E} f \text{ p.t. für}$$

$$\chi_{F_{n_k}}(x) \in \{0, 1\} \quad \forall x \in B_R(0) \setminus N$$

$$\to f \in \{0,1\} \; \forall x \quad \forall x \in B_R(0) \setminus N.$$

$$\Longrightarrow \text{in } L^1_{loc}(\mathbb{R}^n) \quad \chi_{F_n} \longrightarrow \chi_{\tilde{E}} \; \omega (D \wedge B_R(0)^c)$$

denn

$$\chi_{F_n} = \chi_{F_n \cap B_R(0)} + \chi_{F_n \cap B_R(0)^c}$$

$$|(F_n \Delta D) \cap \cancel{B_R(0)^c}\ \Omega^c| = 0$$

$$\Rightarrow |(F_n \Delta D) \cap B_R(0)^c| = 0$$

$$\Rightarrow \chi_{F_n} \overset{f.ü.}{=} \chi_{F_n \cap B_R(0)} + \chi_{D \cap B_R(0)^c}$$

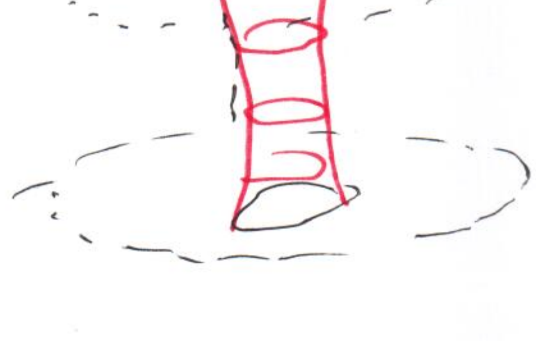
$$\longrightarrow \chi_{\tilde{E}} + \chi_{D \cap B_R(0)^c} = \chi_{\tilde{E} \cup (D \cap B_R(0)^c)}$$

$E := \tilde{E} \cup (D \cap B_R(0)^c)$. Note $E \in \mathcal{M}$! $\nparallel$.

$$\Rightarrow P(\tilde{E} \uplus (D \cap B_R(0)^c); \mathbb{R}^n)$$

$$\leq \lim_{n \to \infty} P(F_n; \mathbb{R}^n) = \inf_{F \in \mathcal{M}} P(F; \mathbb{R}^n) \checkmark$$

## (4) Plateau's Problem



Minimale Oberfläche

mit ~~Rand~~ vorgegebenen Rand

A7

(a) $\int_\Omega |D(f+g)|$

$$= \sup_{\substack{\varphi \in C_c^1(\Omega;\mathbb{R}^n)\\ \|\varphi\|_\infty \le 1}} \int_\Omega (f+g)\,\operatorname{div}\varphi\,dx$$

$$= \sup_{\substack{\varphi \in C_c^1(\Omega;\mathbb{R}^n)\\ \|\varphi\|_\infty \le 1}} \int_\Omega f \operatorname{div}\varphi\,dx + \int_\Omega g \operatorname{div}\varphi\,dx$$

$$\le \int_\Omega |Df| + \int_\Omega |Dg|$$

$\Rightarrow$ Beh.

(b)

$$\int_{\mathbb{R}^n} |Df| \le \liminf_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}^n} |D(f * \varphi_\varepsilon)|\,dx$$

ist klar weil $f * \varphi_\varepsilon \longrightarrow f$ in $L^1(\mathbb{R}^n)$ und $\int_{\mathbb{R}^n} |D(\cdot)|$ ist ~~schw~~ unterhalbstetig.

Sei $\varepsilon > 0$, $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$

$$\int_{\mathbb{R}^n} (f * \varphi_\varepsilon)(x) \operatorname{div}\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(y)\,\varphi_\varepsilon(x-y)\,dy\,\operatorname{div}\varphi(x)\,dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \left(\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(x-y)\operatorname{div}\varphi(x)\,dx\right) dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \left(\int \sum_{i=1}^n \left(D_i\varphi_\varepsilon(x-y)\,\varphi(x)\right) dx\right) dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \left( \int \cancel{\nabla_y}\, \varphi_\varepsilon(x-y)\, \varphi(x)\, dx \right) dy$$

$$\sum$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\, \cancel{\nabla_y \left( \int \varphi_\varepsilon(x-y)\, \varphi(x)\, dx \right) dy}$$

$$\operatorname{div} (\varphi * \varphi_\varepsilon)(y)\, dy$$

$$\cancel{= \int_{\mathbb{R}^n}}$$

$$\| (\varphi * \varphi_\varepsilon)(y) \|_\infty$$

$$= \left\| \left( \int \varphi(x)\, \varphi_\varepsilon(x-y)\, dx \right)_{i=1}^{n} \right\|$$

$$\leq \int \|\varphi(x)\|\, \varphi_\varepsilon(x-y)\, dx \leq 1 \int \varphi_\varepsilon(x-y)\, dx$$

$$= 1.$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^n} |Df|.$$

$$\Longrightarrow \int_{\mathbb{R}^n} |D f * \varphi_\varepsilon| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |Df|.$$

(c)

$$u_\varepsilon = \chi_{E_1} * \varphi_\varepsilon \xrightarrow{L^1_{loc}} \chi_{E_1} \qquad 0 \le u_\varepsilon \le 1$$

$$v_\varepsilon = \chi_{E_2} * \varphi_\varepsilon \xrightarrow{L^1_{loc}} \chi_{E_2} \qquad 0 \le v_\varepsilon \le 1$$

$$P(E_1, \mathbb{R}^n) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int |D \chi_{E_1} * \varphi_\varepsilon|$$

$$u_\varepsilon v_\varepsilon \xrightarrow{L^1_{loc}} \chi_{E_1 \cap E_2} \qquad P(E_2, \mathbb{R}^n) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int |D \chi_{E_2} * \varphi_\varepsilon|$$

$$u_\varepsilon + v_\varepsilon - u_\varepsilon v_\varepsilon \xrightarrow{L^1_{loc}} \chi_{E_1 \cup E_2}$$

$$P(E_1 \cap E_2 ; \mathbb{R}^n) + P(E_1 \cup E_2 ; \mathbb{R}^n)$$

$$\le \liminf_{\varepsilon \to 0} \left( \int_{\mathbb{R}^n} |D u_\varepsilon v_\varepsilon| + \int_{\mathbb{R}^n} |D(u_\varepsilon + v_\varepsilon - u_\varepsilon v_\varepsilon)| \right)$$

$$= \liminf_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}^n} |D u_\varepsilon v_\varepsilon + u_\varepsilon D v_\varepsilon|$$
$$+ \int_{\mathbb{R}^n} |D u_\varepsilon + D v_\varepsilon - D u_\varepsilon v_\varepsilon + D v_\varepsilon u_\varepsilon|$$

$$= \liminf_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}^n} v_\varepsilon |D u_\varepsilon| + u_\varepsilon |D v_\varepsilon|$$
$$+ \int_{\mathbb{R}^n} (1 - v_\varepsilon) |D u_\varepsilon| + (1 - u_\varepsilon) |D v_\varepsilon|$$

$$= \liminf_{\varepsilon \to 0} \left( \int_{\mathbb{R}^n} |D u_\varepsilon| + \int_{\mathbb{R}^n} |D v_\varepsilon| \right) = P(E_1, \mathbb{R}^n) + P(E_2, \mathbb{R}^n)$$

<u>A7 d</u> (i) Seien $\lambda_1 - \lambda_n$ konstruiert wie in Bemerkung 2.2 (i)

$\exists\, D_1 \subset D$

$$|(\lambda_1(D \setminus D_1), \dots, \lambda_n(D \setminus D_1))| < \varepsilon$$

Sei $\varphi \in C_0^{\infty}(D \setminus D_1, \mathbb{R}^n)$, $\|\varphi\|_\infty \le 1$

$$\int_{D \setminus D_1} v \operatorname{div}(\varphi)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \int_{D \setminus D_1} v \operatorname{div}\varphi \, dx$$

$$\cancel{= \sum_{i=1}^{n} \int_{D \setminus D_1} \varphi \, d(\lambda_1, - \lambda_n)(x)}$$

$$= \lim_{k \to \infty} \int_D v \eta_k \operatorname{div}(\varphi) \, dx =$$

$$= \lim_{k \to \infty} \int_D v \left(\operatorname{div}(\eta_k \varphi) - D\eta_k D\varphi\right) dx$$

$$= \lim_{k \to \infty} \int_D \eta_k \varphi \, d(\lambda_1 - \lambda_n)(x)$$

$$- \int \underbrace{v \nabla \eta_k D\varphi}_{=0}$$

$$\overset{DCT}{=} \int_{D \setminus D_1} \varphi \, d(\lambda_1 - \lambda_n)(x)$$

$$\le \left(\lambda_1(D \setminus D_1), \; - \; \lambda_n(D \setminus D_1)\right).$$

(ii)

$$0 = \nabla 1 = \nabla \left( \sum_{k=0}^{\infty} \zeta_k(x) \right)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \nabla \zeta_k(x) \quad \text{qed.}$$

(iii)

$$\int |v_\varepsilon - v| \, dx \le \int \left| \sum_{k=1}^{\infty} \left( \eta_{\varepsilon_k} * v \zeta_k - v \zeta_k \right) \right| dx$$

$$\le \sum_{k=1}^{\infty} \int |\eta_{\varepsilon_k} * (v \zeta_k) - v \zeta_k| \, dx$$

$$\le \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon / 2^k = \varepsilon .$$

(iv)

$$\int_\Omega v_\varepsilon \operatorname{div} \varphi = \sum_{k=1}^{\infty} \int_\Omega (\eta_{\varepsilon_k} * v \cdot \zeta_k) \operatorname{div} \varphi$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{V_N} \eta_{\varepsilon_k} * (v \zeta_k) \quad \operatorname{div} \varphi$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{V_N} v \, \zeta_k \quad \operatorname{div} (\varphi * \eta_{\varepsilon_k})$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{V_N} v \, \zeta_k \left( \operatorname{div} \left( \zeta_k (\varphi * \eta_{\varepsilon_k}) \right) - \nabla \zeta_k \, \varphi * \eta_{\varepsilon_k} \right)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{V_N} v \operatorname{div} \left( \zeta_k (\varphi * \eta_{\varepsilon_k}) \right) - v \nabla \zeta_k \cdot \varphi * \eta_{\varepsilon_k}$$

$$\leq \sum_{k=1}^{\infty} \left| \int v \operatorname{div}\left(\sum_{k=1}^{N} \xi_k \, \varphi * \eta_{\varepsilon_k}\right) \right.$$

$$\left. + \left| \sum_{k=1}^{\infty} \int v D\xi_k * \varphi_{\varepsilon_k} \, \varphi \, dx \right| \right.$$

$$\leq \int |Dv| + \sum_{k=1}^{\infty} \left| \int v \, D\xi_k * \varphi_{\varepsilon_k} \, \varphi - \int v D\xi_k \, \varphi \right|$$

$$+ \underbrace{\left| \sum_{k=1}^{\infty} \int v \, D\xi_k \, \varphi \right|}_{= 0}$$

$$= \int |Dv| + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \int |Dv| + \varepsilon \; \_$$

(a) $K \subset X$ abgeschlossen und konvex

$\Longrightarrow K$ schwach abgeschlossen $\xrightarrow[\text{Methoden}]{\text{Direkte}}$ Bew.

(b) Angenommen $\exists\, v_1, v_2 \in K$

$$\mathcal{E}(v_1) = \mathcal{E}(v_2) = \inf_{u \in K} \mathcal{E}(u) =: \alpha$$

$$\alpha \leq \mathcal{E}(t v_1 + (1-t) v_2) \leq t\,\mathcal{E}(v_1) + (1-t)\,\mathcal{E}(v_2) = t\alpha + (1-t)\alpha$$

$$= \alpha$$

$\Longrightarrow$ Es gilt Gleichheit $\Rightarrow$ $v_1 = v_2$

(c) $(1) \Rightarrow (2)$

$$\mathcal{E}'(v)(u-v)$$

$$= \lim_{t \to 0^+} \frac{\mathcal{E}(tu + (1-t)(v)) - \mathcal{E}(v)}{t}$$

$$\leq \lim_{t \to 0^+} \frac{t\,\mathcal{E}(u) + (1-t)\,\mathcal{E}(v) - \mathcal{E}(v)}{t}$$

$$= \mathcal{E}(u) - \mathcal{E}(v)$$

(2) $\Rightarrow$ (3)

$$\mathcal{E}(u)-\mathcal{E}(v) \geq \mathcal{E}'(v)\,(u-v)$$
$$\mathcal{E}(v)-\mathcal{E}(u) \geq \mathcal{E}'(u)\,(v-u)$$
$$0 \geq \big(\mathcal{E}'(v)-\mathcal{E}'(u)\big)\,(u-v)$$

$\Rightarrow$ Beh.

(3) $\Rightarrow$ (1)

$$F:[0,1] \to t \mapsto \mathcal{E}(tu+(1-t)v) - t\,\mathcal{E}(u) - (1-t)\,\mathcal{E}(v)$$

erfüllt $F(0) = F(1) = 0$

$\cancel{\Rightarrow \exists \xi : 0 = \mathcal{E}'(\xi)\,(u-v) - \mathcal{E}(u) - \mathcal{E}(v)}$

$\Rightarrow \exists \xi : F(\xi) = 0$

$$\frac{d}{dt}: \mathcal{E}'(tu+(1-t)v)\,(u-v)$$
$$-\mathcal{E}(u)+\mathcal{E}(v)$$

$t_1 < t_2$

$$\Rightarrow \mathcal{E}'(t_1u+(1-t_1)v)^{(u-v)} - \mathcal{E}(u)+\mathcal{E}(v)$$

$F'(t_1)-F'(t_2)$ $$-\mathcal{E}'(t_2u-(1-t_2)v)(u-v) - \mathcal{E}(u)+\mathcal{E}(v) \geq 0$$

$$F' \leq 0 \quad \forall t \in [0,\xi]$$

$\cancel{F(0) - F(\xi)}$ $$F' \geq 0 \quad \forall t \in [\xi,1]$$

$\downarrow$ bis zu $\xi$.

$\ddagger$ Arg max im Inneren $F'(\xi) = 0$

d)

$$\mathcal{E}(u) - \mathcal{E}(v) \geq \mathcal{E}'(v)\,(v-u)$$

$$f(x) - f(y) \geq \langle \nabla f(y), x-y \rangle$$

$$f(y) = \sqrt{1+|y|^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y_i}(y) = \frac{2\,y_i}{2\sqrt{1+|y|^2}} = \frac{y_i}{\sqrt{1+|y|^2}}$$

$$\Rightarrow \nabla f(y) = \frac{y}{\sqrt{1+|y|^2}} \Rightarrow \text{Bew.}$$

e) $$\lim_{t\to 0} \frac{\mathcal{E}'(v+tx)(x) - \mathcal{E}'(v)(x)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\left(\mathcal{E}'(v+tx) - \mathcal{E}'(v)\right)\left(\frac{v+tx-v}{t}\right)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\left(\mathcal{E}'(v+tx) - \mathcal{E}'(v)\right)\left((v+tx)-v\right)}{t^2} \geq 0.$$