Cheat Sheet

Nutzliche Teilfolgenargumente

Lemma von Fatou

$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum, $f_n \in \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$

$f_n \geq 0$ μ-f.ü. $f_n \longrightarrow f$ punktw.

Dann $\int f \, d\mu \leq \liminf_{n \to \infty} \int f_n \, d\mu$

Satz von Lebesgue - Masterversion

Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und

$f, (f_n) \subset \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ so, dass $f_n \longrightarrow f$ μ-fast überall.

Gibt es $(g_n) \subset \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ so, dass $g_n \longrightarrow g$ μ-fast überall

$\int g_n \, d\mu \longrightarrow \int g \, d\mu$ und $|f_n| \leq g_n$ μ-fast überall so

gilt $\int f_n \, d\mu \longrightarrow \int f \, d\mu$.

Umkehrung des Satzes von Lebesgue

Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum und

$f, (f_n) \subset \mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ so, dass

$f_n \longrightarrow f$ in $\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Dann gibt es

eine Teilfolge (f_{k_n}) derart dass

$f_{k_n} \longrightarrow f$ punktweise μ-f.ü.

Satz von Egorow

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein endlicher Maßraum und

$(f_n) \subset \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ so, dass $f_n \longrightarrow f$ μ-f.ü.

Dann gilt

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists A \in \mathcal{A} : \mu(A) < \varepsilon$ und $f_n \longrightarrow f$ gleichmäßig auf

$\Omega \setminus A$.

Satz von Arzelà-Ascoli

Es sei K ein kompakter metrischer Raum

$C(K) := \{ f : K \to \mathbb{R} \mid f \text{ stetig} \}$.

$(f_n) \subset C(K)$:

- $\forall x \in K \quad \sup_{n \in \mathbb{N}} \{ |f_n(x)| \} < \infty$ (punktweise beschränkt)
- $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} : |f_n(x_1) - f_n(x_2)| < \varepsilon$ (gleichgradig stetig)

Schwache Konvergenz und Schwach-*-Konvergenz

X reflexiv $(x_n) \subset X$ beschränkt $\Rightarrow \exists$ TF $\exists x \in X$ $x_{l_n} : x_{l_n} \longrightarrow x$

schwach

X separable $(\varphi_n) \subset X^*$ beschränkt

$\Rightarrow \exists$ TF φ_{l_n} $\exists \varphi \in X^*$: $\varphi_{l_n} \xrightarrow{*} \varphi$

Kompaktheit von Einbettungen

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$, C^1 glatter Rand

$BV(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega)$

$W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{k',p'}(\Omega)$ $\quad k > k'$, und $\frac{1}{p} - \frac{k}{n} < \frac{1}{p'} - \frac{k'}{n}$

sind kompakt.