Aufgabe 9

(a) $\mathcal{E}(y) := \|y\|^2$ auf $K \subset H$. Benutze Satz 1.6

- koerziv ✓ da $\|y\| \to \infty \implies \mathcal{E}(y) \to \infty$
- H reflexiv, da Hilberträume reflexiv.
- $\mathcal{E}$ schwach unterhalbstetig ✓ (Die Norm ist schwach unterhalbstetig)
- $K \subset H$ schwach abgeschlossen, denn

K konvex & abgeschlossen $\xRightarrow[\text{Mazur}]{\text{Hahn-Banach}}$ K schwach abgeschlossen

$$\implies \exists x \in K : \mathcal{E}(x) = \inf_{y \in K} \mathcal{E}(y)$$

x ist eindeutig denn angenommen $\exists x_1, x_2 \in K$

$\|x_1\|^2 = \|x_2\|^2 = \inf_{y \in K} \mathcal{E}(y)$. Dann $\frac{x_1 + x_2}{2} \in K$, da K konvex

$$\implies \|x_1\|^2 \leq \left\| \frac{x_1 + x_2}{2} \right\|^2 = \frac{1}{4}\left(\|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 + 2 \underbrace{(x_1, x_2)}_{\underset{\text{CSU}}{\leq} \|x_1\| \|x_2\|} \right)$$

$$\leq \frac{(\|x_1\| + \|x_2\|)^2}{4} = \frac{(2\|x_1\|)^2}{4} = \|x_1\|^2$$

$\implies$ Es gilt Gleichheit bei der Cauchy-Schwarz Ungleichung d.h.

$$(x_1, x_2) = \|x_1\| \|x_2\| = \|x_1\|^2$$

Dann

$$(x_1 - x_2, x_1 - x_2) = \|x_1\|^2 - 2(x_1, x_2) + \|x_2\|^2 = 0$$

$$\implies x_1 = x_2$$

(b) (Variationsungleichung für $\mathcal{E}$)

Sei $y \in K$ und $x \in K$ s., dass $\mathcal{E}(x) = \inf_{y \in K} \mathcal{E}(y)$

$$\implies 0 \leq \frac{d}{dt} \|x + t(y-x)\|^2 \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} \left(x + t(y-x), x + t(y-x) \right) \Big|_{t=0}$$

$$= \frac{d}{dt} \|x\|^2 + 2t(x, y-x) + t^2 \|y-x\|^2 \Big|_{t=0} = 2(x, y-x)$$

(c)

$$\mathcal{E}(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - x'(u)$$

- Koerziv? (Möglichkeit: $\mathcal{E}(u) \geq C\|u\|^2 + d$ $\quad C>0,\ d \in \mathbb{R}$)

$$\mathcal{E}(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - x'(u) \geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \|x'\|_{H'}\|u\|$$

$$= \frac{1}{2}\|u\|^2 - (\sqrt{\varepsilon}\|u\|)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\|x'\|_{H'}\right)$$

Peter and Paul Ungleichung (Britisches Sprichwort?! Rob Peter to pay Paul)

$$\geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{\varepsilon}{2}\|u\|^2 - \frac{1}{2\varepsilon}\|x'\|_{H'}$$

$$= \frac{1-\varepsilon}{2}\|u\|^2 - \frac{1}{2\varepsilon}\|x'\|_{H'}$$

$$\overset{\varepsilon=\frac{1}{2}}{=} \frac{1}{4}\|u\|^2 - \|x'\|_{H'}$$ Ja ✓

H reflexiv? Ja als HR

H schwach abgeschlossen? Ja ✓

$\mathcal{E}$ schwach unterhalbstetig denn

$x_n \rightharpoonup x$

$$\liminf_{n\to\infty} \mathcal{E}(x_n) = \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{2}\|x_n\|^2 - \underbrace{x'(x_n)}_{\to x'(x) \text{ da } x' \in H'}$$

$$= \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{2}\|x_n\|^2 - x'(x) \geq \frac{1}{2}\|x\|^2 - x'(x) = \mathcal{E}(x).$$

$$\Rightarrow \exists\, v \in H : \mathcal{E}(v) \leq \mathcal{E}(u)\ \forall u \in H$$

Sei $\varphi \in H$. Dann gilt:

$$0 = \frac{d}{dt}\mathcal{E}(v+t\varphi)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\frac{1}{2}\|v+t\varphi\|^2 - x'(v+t\varphi)\Big|_{t=0}$$

$$= \frac{d}{dt}\frac{1}{2}\|v\|^2 + \cancel{2}t(v,\varphi) + \frac{t^2\|\varphi\|^2}{2} - x'(v) - tx'(\varphi)\Big|_{t=0}$$

$$= (v,\varphi) - x'(\varphi)$$

$$\Longrightarrow \quad x'(\varphi) = (v, \varphi) \quad \forall \varphi \in H \qquad (1)$$

Euler-Lagrange-Gl. liefert Riesz-Darstellungssatz.!

<u>Eindeutigkeit des Minimierers</u>

Angenommen $v_1, v_2 \in H$ sind Minimierer,
Dann lösen beide Gleichung (1)

$$\Rightarrow (v_1, \varphi) = x'(\varphi) = (v_2, \varphi) \quad \forall \varphi \in H$$

$$\Rightarrow (v_1 - v_2, \varphi) = 0 \quad \forall \varphi \in H$$

$$\varphi = v_1 - v_2 \quad \Longrightarrow \quad \|v_1 - v_2\|^2 = 0$$

$$\Rightarrow v_1 = v_2.$$

(d) $K \subset H$ Konvex & abgeschlossen, $x \in H$

z.z. $\exists!\, z \in K : \|x - z\| \leq \|x - y\| \;\forall y \in K$

<u>Bew</u>: $\mathcal{E} : K \xrightarrow{\subset H} \mathbb{R}$

$$\mathcal{E}(y) := \|y - x\|^2$$

H reflexiv ✓
$K \subset H$ schwach abgeschlossen ✓

<u>$\mathcal{E}$ schwach unterhalbstetig?</u>

Sei $y_n \rightharpoonup y$. Dann $y_n - x \rightharpoonup y - x$, denn
für $x' \in H'$ gilt

$$x'(y_n - x) = x'(y_n) - x'(x) \longrightarrow x'(y) - x'(x) = x'(y - x)$$

ε koerziv?

$$\mathcal{E}(y) = \|y-x\|^2 = \|y\|^2 + \|x\|^2 - 2(y,x)$$

$$\geq \|y\|^2 + \|x\|^2 - 2\|y\|\|x\|$$

$$= \|y\|^2 + \|x\|^2 - 2\left(\sqrt{\varepsilon}\|y\|\right)\left(\tfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\|x\|\right)$$

Peter

$$\geq (1-\varepsilon)\|y\|^2 + \|x\|^2\left(1-\frac{1}{\varepsilon}\right)$$

Paul

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \qquad \frac{1}{2}\|y\|^2 - \|x\|^2 \Rightarrow \text{Bew.}$$

$$\Rightarrow \exists z \in K : \|z-x\|^2 \leq \|y-x\|^2 \quad \forall y \in K.$$

Eindeutigkeit Sei $\cancel{z}$ ein Minimierer. Dann für $y \in K$

$$0 \leq \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \mathcal{E}(z + t(y-z)) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \|z+t(y-z)-x\|^2$$

$$= 2(z-x, y-z).$$

$$\Rightarrow (x-z, y-z) \leq 0 \quad \forall y \in K$$

Seien z_1, z_2 Minimierer

$$(x-z_1, y-z_1) \leq 0 \quad \forall y \in K$$

$$(x-z_2, y-z_2) \leq 0 \quad \forall y \in K$$

$y = z_2$ in erste Gl. und $y = z_1$ in zweite Gl.

+ Addieren

$$\Rightarrow ((x-z_1) - (x-z_2), z_2 - z_1) \leq 0$$

$$\Rightarrow (z_2 - z_1, z_2 - z_1) \leq 0 \Rightarrow \|z_2 - z_1\|^2 \leq 0$$

$\Rightarrow z_1 = z_2$,

Aufgabe 10

(b) Es sei $j \in \{1, \ldots, n\}$ $(u_n) \subset C^1(\mathbb{R}^n) \cap W^{1,2}(\Omega)$ so dass $u_n \xrightarrow{W^{1,2}} u$. Nach Auswahl einer Teilfolge können wir auch erreichen dass $u_n \longrightarrow u$ pktw f.ü und $\partial_j u_n \longrightarrow \partial_j u$ pktw. f.ü. Wir zeigen zunächst $\sqrt{u^2+\frac{1}{m}}$ ist schwach diffbar

Sei dazu $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$

- $$\int_\Omega \sqrt{u^2+\frac{1}{m}}\, \partial_j \varphi = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \sqrt{u_n^2+\frac{1}{m}}\, \partial_j \varphi$$

denn

$$\int_\Omega \left| \sqrt{u^2+\frac{1}{m}}\, \partial_j \varphi - \sqrt{u_n^2+\frac{1}{m}}\, \partial_j \varphi \right|$$

$$= \int_\Omega \left| \sqrt{u^2+\frac{1}{m}} - \sqrt{u_n^2+\frac{1}{m}} \right| |\partial_j \varphi|$$

$$= \int_\Omega \left| \int_{\min(u^2,u_n^2)}^{\max(u^2,u_n^2)} \frac{1}{\sqrt{z+\frac{1}{m}}}\, dz \right| |\partial_j \varphi|\, dx$$

$$\le \int_\Omega \sqrt{m}\, |u_n^2 - u^2|\, |\partial_j \varphi|$$

$$\le \sqrt{m}\, \|\partial_j \varphi\|_\infty \int |u_n^2 - u^2|\, dx$$

$$= \sqrt{m}\, \|\partial_j \varphi\|_\infty \int_\Omega (u_n - u)(u_n + u)\, dx$$

$$\le \sqrt{m}\, \|\partial_j \varphi\|_\infty \underbrace{\|u_n - u\|_{L^2(\Omega)}}_{\longrightarrow 0} \underbrace{\|u_n + u\|_{L^2(\Omega)}}_{\le \|u_n\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}\ \text{beschr}} \longrightarrow 0$$

6

$$\Rightarrow \int_\Omega \sqrt{u^2+\tfrac{1}{m}}\ \partial_j\varphi = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \sqrt{u_n^2+\tfrac{1}{m}}\ \partial_j\varphi\ dx$$

$$\underset{\text{gauß}}{=} \lim_{n\to\infty} -\int_\Omega \partial_j \sqrt{u_n^2+\tfrac{1}{m}}\ \varphi\ dx$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \frac{u_n\,\partial_j u_n}{\sqrt{u_n^2+\tfrac{1}{m}}}\ \varphi\ dx$$

$$\underset{\text{Lebesgue}(*)}{=} \int_\Omega \frac{u}{\sqrt{u^2+\tfrac{1}{m}}}\ \partial_j u\ \varphi\ dx$$

Lebesgue (*)

Es sei (f_n) eine Folge messbarer Funktionen so, dass $f_n \longrightarrow f$ pktw f.ü. und

$\exists\,(g_n)$ Folge messbarer Funktionen so dass $g_n \to g$ pktw f.ü.

$\exists\, g \in L^1(\Omega)$ mit ~~$g_n \to g$~~

und $\int g_n\,dx \longrightarrow \int g\,dx$ und $|f_n| \le g_n$

Dann $\int f_n\,dx \longrightarrow \int f\,dx$

Hier $\quad g_n = |\partial_j u_n|\,|\varphi| \qquad \int g_n\,dx \to \int g\,dx$

da $|\partial_j u_n| \xrightarrow{L^2} |\partial_j u|$

$$f_n = \frac{u_n\,\partial_j u_n\,\varphi}{\sqrt{u_n^2+\tfrac{1}{m}}},\ g = |\partial_j u|\,|\varphi|$$

$$|f_n| = \underbrace{\frac{|u_n|}{\sqrt{u_n^2+\tfrac{1}{m}}}}_{\le 1}\ |\partial_j u_n|\,|\varphi| \ \le\ g_n$$

$\Longrightarrow$ $\sqrt{u^2+\frac{1}{m}}$ ist schwach diffbar mit schwacher Ableitung ~~.....~~ $\partial_j \sqrt{u^2+\frac{1}{m}} = \dfrac{u\,\partial_j u}{\sqrt{u^2+\frac{1}{m}}}$

Nun $\sqrt{u^2+\frac{1}{m}} \in L^2(\Omega)$ da

$$\int \left|\left|\sqrt{u^2+\tfrac{1}{m}}\right| dx = \int \left(u^2+\tfrac{1}{m}\right) dx = \int u^2\,dx + \tfrac{1}{m}|\Omega|$$

$< \infty$

und $\dfrac{u\,\partial_j u}{\sqrt{u^2+\frac{1}{m}}} \in L^2(\Omega)$ denn

$$\int_\Omega \left|\frac{u\,\partial_j u}{\sqrt{u^2+\frac{1}{m}}}\right|^2 dx$$

$$= \int_\Omega \frac{u^2}{u^2+\frac{1}{m}} |\partial_j u|^2\,dx \leq \int_\Omega |\partial_j u|^2\,dx < \infty$$

$\Longrightarrow$ $\sqrt{u^2+\frac{1}{m}} \in W^{1,2}(\Omega)$

<u>Nun</u> $\left(\sqrt{u^2+\frac{1}{m}}\right)_{m\in\mathbb{N}}$ ist Cauchy in $W^{1,2}(\Omega)$ da

$\sqrt{u^2+\frac{1}{m}}$ und $\dfrac{u\,\partial_j u}{\sqrt{u^2+\frac{1}{m}}}$ L^2-konvergente Folgen sind

<u>Bew</u> $\sqrt{u^2+\frac{1}{m}} \longrightarrow |u|$ pktw

und $\left|\sqrt{u^2+\frac{1}{m}}\right| \leq \sqrt{u^2+1} \in L^2(\Omega)$

$\overset{\text{Lebesgue}}{\Longrightarrow}$ $\sqrt{u^2+\frac{1}{m}} \longrightarrow |u|$ in $L^2(\Omega)$

$$\frac{u\,\partial_j u}{\sqrt{u^2+\frac{1}{m}}} \longrightarrow \partial_j u \operatorname{sgn} u := \partial_j u\,(\chi_{u>0} - \chi_{u<0})$$

pktw. und

$$\left|\frac{u\,\partial_j u}{\sqrt{u^2+\frac{1}{m}}}\right| \leq |\partial_j u| \in L^2(\Omega)$$

Lebesgue
$$\Longrightarrow \frac{u\,\partial_j u}{\sqrt{u^2+\frac{1}{m}}} \longrightarrow \partial_j u \operatorname{sgn} u \quad \text{in } L^2(\Omega)$$

$\Longrightarrow \sqrt{u^2+\frac{1}{m}}$ ist Cauchy in $W^{1,2}$ $\Longrightarrow$ $|u| = \overset{L^2}{\lim_{n\to\infty}} \sqrt{u^2+\frac{1}{m}} \in W^{1,2}$

denn L^2 limites und $W^{1,2}$-limites müssen übereinstimmen.

(c)

$$u^+ = \frac{u+|u|}{2} \in W^{1,2}(\Omega)$$

als Linearkombinationen von $W^{1,2}(\Omega)$-Funktionen

$$D_{x_j} u^+ = \frac{D_{x_j} u + D_{x_j} |u|}{2}$$

$$= \frac{D_{x_j} u + D_{x_j} u \operatorname{sgn} u}{2} = \frac{D_{x_j} u\,(\chi_{u>0} + \chi_{u=0} + \chi_{u<0}) + D_{x_j} u\,(\chi_{u>0} - \chi_{u<0})}{2}$$

$$= D_{x_j} u\,\chi_{u>0} + \frac{1}{2} D_{x_j} u\,\chi_{u=0} \quad (A)$$

$$D_{x_j} u^+ = D_{x_j} (u^+)^+$$

$$= D_{x_j} u^+\,\chi_{u^+>0} + \frac{1}{2} D_{x_j} u^+\,\chi_{u^+=0}$$

$$= \left(D_{x_j} u\, \chi_{u>0} + \frac{1}{2} D_{x_j} u\, \chi_{u=0} \right) \chi_{u^+>0}$$

$$+ \frac{1}{2} \left(D_{x_j} u\, \chi_{u>0} + \frac{1}{2} D_{x_j} u\, \chi_{u=0} \right) \chi_{u\leq 0}$$

$$= D_{x_j} u\, \chi_{u>0} + \frac{1}{4} D_{x_j} u\, \chi_{u=0} \qquad (B)$$

$$\overset{(A)-(B)}{\Longrightarrow} \quad 0 = D_{x_j} u\, \chi_{u=0} \qquad (C)$$

$$\Longrightarrow D_{x_j} u^+ = D_{x_j} u\, \chi_{u>0},$$

Bem $u, v \in W^{1,2}(\Omega)$

$$\max(u,v) = u + (v-u)^+ \quad \in W^{1,2}(\Omega)$$

$$\min(u,v) = u - (v-u)^- \quad \in W^{1,2}(\Omega)$$

dann

$$u^- = (-u)^+ \in W^{1,2}(\Omega) \quad \text{mit schw. Abl}$$

$$D_{x_j} u^- = D_{x_j}(-u)\, \chi_{-u>0} = -D_{x_j} u\, \chi_{u<0}$$

(d) Gleichung (C) sagt $D_{x_j} u \chi_{u=0} = 0$, (f.ü.)

$\Rightarrow D_{x_j} u = 0$ auf $\{u=0\}$ f.ü.

(e) $u^+ \in W_0^{1,2}(\Omega)$

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi \, dx \le 0$$

$\forall \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$ $\quad \varphi \ge 0$ f.ü.

z.z. $u \le 0$ f.ü.

$\varphi = u^+$

$$0 \ge \int_\Omega \nabla u \, \nabla u^+ \, dx$$

$$= \int_\Omega \nabla u \; \nabla u \; \chi_{u>0}$$

~~Leider~~ Idee !

$$= \int_\Omega |\nabla u|^2 \chi_{u>0} \, dx$$

$\Longrightarrow |\nabla u| = 0$ f.ü. auf $\{u>0\}$

Folgt leider $\Longrightarrow$ nur falls $\{u>0\}$ offen

$u = \text{const}$ f.ü. auf $\{u>0\}$

Da auf $\partial(\{u>0\})$ gilt

$u=0$ hat man

$u=0$ auf $\{u>0\}$

$\Rightarrow \{u>0\}$ leer.

Besser als Idee !

$$0 \geq \int_\Omega Du\, Du\, \chi_{u>0} = \int_\Omega Du\, Du\, \chi_{u>0}\, \chi_{u>0}$$

$$= \int_\Omega |Du^+|^2 \implies |Du^+| = 0 \text{ f.ü. auf } \Omega$$

Nun:

$$\int_\Omega (u^+)^2\, dx \overset{\text{Poincaré}}{\leq} C_P(\Omega) \int_\Omega |Du^+|^2\, dx = 0$$

$$\implies u^+ = 0 \text{ f.ü.} \implies u \leq 0 \text{ f.ü.}$$

~~(h) Sei $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$~~

(g) $\quad 0 \leq \min(u,v) \leq u \in W_0^{1,2}(\Omega)$

$$\xrightarrow{\text{Aufg. (f)}} \min(u,v) \in W_0^{1,2}(\Omega)$$

(h) Sei $\varphi \in C_c^\infty(\Omega) \implies u + t\varphi \in M$, da $u + t\varphi - u_0 = \underbrace{(u-u_0)}_{\in W_0^{1,2}} + \underbrace{t\varphi}_{\in W_0^{1,2}} \in W_0^{1,2}(\Omega)$

$$0 = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \left(\frac{1}{2}\int_\Omega |D(u+t\varphi)|^2 - \int_\Omega G(x, u+t\varphi)(x)\, dx\right)$$

$$= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \frac{1}{2}\int_\Omega |Du|^2 + 2t\, Du\, D\varphi + t^2 |D\varphi|^2 - \int_\Omega \int_0^{(u+t\varphi)(x)} g(x,w)\, dw\, dx$$

$$= \cancel{2} \int Du\, D\varphi - \lim_{t\to 0} \int_\Omega \frac{1}{t} \int_{u(x)}^{u(x)+t\varphi(x)} g(x,w)\, dw\, dx$$

$$= \int Du\, D\varphi - \int_\Omega g(x, u(x))\varphi(x)\, dx$$

Problem

$$\lim_{t\to 0} \int_\Omega \frac{1}{t} \int_{u(x)}^{u(x)+t\varphi(x)} g(x,w)\, dw\, dx = \int_\Omega g(x,u(x))\,\varphi(x)\, dx$$

gilt nur wenn $|g(x,u(x))\,\varphi(x)| \in L^1$

und es gibt derzeit leider keinen Anhaltspunkt dafür :-(

Später in M' ist das aber OK!

Sei $(u_n) \subset M$ d.h. $u_n - u_0 \in W_0^{1,2}(\Omega)$ so, dass

(i) $u_n \rightharpoonup u$ in $W^{1,2}(\Omega)$

$\Rightarrow u_n - u_0 \rightharpoonup u - u_0$ in $W^{1,2}(\Omega)$

$\Rightarrow u - u_0 \in W_0^{1,2}(\Omega)$ da

$W_0^{1,2}(\Omega)$ abgeschlossen & konvex & damit schwach abgeschlossen

(g) $u_0 = 0 \Rightarrow M = W_0^{1,2}(\Omega)$

$$\mathcal{E}(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |Du|^2 - \frac{c}{2}\int_\Omega u^2\, dx$$

Wir wissen $\exists\, C_p > 0 : \int_\Omega u^2\, dx \le C_p \int |Du|^2 dx$

und $C_p = \inf\left\{ D > 0 : \int_\Omega u^2 dx \le D \int |Du|^2 dx \quad \forall u \in W_0^{1,2}(\Omega) \right\}$

$$\Rightarrow \mathcal{E}(u) \geq \frac{1}{2}\int_\Omega |Du|^2 dx - \frac{c\,C_p}{2}\int |Du|^2 dx$$

$$= \frac{1 - c\,C_p}{2} \int |Du|^2 dx = \frac{1-cC_p}{2} \|u\|^2_{W_0^{1,2}(\Omega)}$$

$$\geq \frac{1 - C\, C_P}{2}\, \delta\, \|u\|^2_{W^{1,2}(\Omega)}$$

da $\|\cdot\|_{W^{1,2}}$ und $\|\cdot\|_{W_0^{1,2}}$ auf $W_0^{1,2}$ äquivalent.

<u>Nun</u> $C < \frac{1}{C_P} \Longrightarrow$

$$\mathcal{E}(u) \geq \varepsilon \|u\|^2 \Rightarrow \mathcal{E} \text{ koerziv.}$$

für ein $\varepsilon > 0$

$$C > \frac{1}{C_P}$$

$$\Rightarrow C_P > \frac{1}{C} + \eta \quad \text{für ein } \eta > 0$$

$$\Rightarrow \exists\, \tilde{u} \in W_0^{1,2} : \; u \neq 0 \text{ und}$$

$$\int \tilde{u}^2\, dx > \left(\frac{1}{C} + \eta\right) \int |\nabla \tilde{u}|^2\, dx$$

$$\mathcal{E}(\tilde{u}) \leq \frac{1}{2}\int |\nabla \tilde{u}|^2\, dx - \frac{C}{2}\int \tilde{u}^2\, dx \leq \frac{1}{2} \underbrace{\left(\frac{1}{\frac{1}{C}+\eta} - C\right)}_{<0} \int \tilde{u}^2\, dx$$

$$\tilde{u}_n := n\tilde{u}$$

$$\Rightarrow \int \tilde{u}_n^2\, dx \longrightarrow \infty \quad \text{aber} \quad \mathcal{E}(\tilde{u}_n) \leq \frac{n^2}{2}\left(\frac{1}{\frac{1}{C}+\eta} - C\right) \int \tilde{u}^2\, dx$$

$$\Rightarrow \|\tilde{u}_n\|^2_{W^{1,2}} \longrightarrow \infty$$

$$\longrightarrow -\infty$$

$\Rightarrow \mathcal{E}$ nicht koerziv.

(k)

<u>$\mathcal{E}$ koerziv</u>

denn

$$\mathcal{E}(u) = \frac{1}{2}\int |Du|^2\,dx - \int_\Omega g(x, \underbrace{u(x)}_{\in[\underline{c},\overline{c}]})\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_\Omega |Du|^2\,dx - \int_\Omega \int_0^{u(x)} g(x,w)\,dw\,dx$$

$$\geq \frac{1}{2}\int_\Omega |Du|^2\,dx - \int_\Omega |u(x)| \sup_{(x,w)\in\overline{\Omega}\times \underbrace{\operatorname{conv}(\underline{c},0,\overline{c})}_{\text{kompakt}}} |g(x,w)|\,dw\,dx$$

$$\geq \frac{1}{2}\int_\Omega |Du|^2\,dx - \max\{|\underline{c}|,|\overline{c}|\}\,|\Omega| \sup_{(x,w)\in\overline{\Omega}\times\operatorname{conv}(\underline{c},0,\overline{c})} |g(x,w)|$$

NR

$$\sqrt{\int_\Omega |Du|^2\,dx} \overset{\text{in } \Delta\text{ungl}}{\geq} \sqrt{\int |D(u-u_0)|^2\,dx} - \sqrt{\int |Du_0|^2\,dx}$$

$$\geq \delta\,\|u-u_0\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} - \|u_0\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}$$

$$\geq \delta \|u\|_{W_0^{1,2}} - (\delta+1)\|u_0\|_{W_0^{1,2}}$$

$\Rightarrow \mathcal{E}(u)$

$$\geq \frac{1}{2}\left(\delta \|u\|_{W^{1,2}_0} - (\delta+1)\|u_0\|_{W^{1,2}}\right)^2$$

$$- \max\{|\underline{c}|, |\bar{c}|\}\, |\Omega| \sup_{(x,w)\in\bar{\Omega}\times \operatorname{conv}(\underline{c},0,\bar{c})} |g(x,w)|$$

$\longrightarrow \infty$ falls $\|u\|_{W^{1,2}} \to \infty$

$\mathcal{E}$ schwach unterhalbstetig. Sei $(u_m) \subset \mathcal{M}'$

$u_m \rightharpoonup u$ in $W_0^{1,2}(\Omega)$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\int |\nabla u|^2 dx \leq \liminf_{m\to\infty} \frac{1}{2}\int |Du_m|^2 \, dx$$

Nun da Rellich Kondrachow impliziert, dass

$i : W^{1,2}(\Omega) \to L^2(\Omega) \quad f \mapsto f$ kompakt ist,

hat man

$u_m \to u$ in $L^2(\Omega)$ [! Rand von Ω]

$\Rightarrow u_{l_m} \to u$ f.ü.

$$\Rightarrow \int_\Omega g(x, u_{l_m}(x))\,dx \longrightarrow \int_\Omega g(x, u(x))\,dx$$

denn $|g(x, u_{l_m}(x))| \leq \sup_{(x,w)\in\bar{\Omega}\times[\underline{c},\bar{c}]} |g(x,w)| \in L^1$

und $g(x, u_{l_m}(x)) \to g(x, u(x))$ f.ü.

Sei nun u_{k_m} : $\lim_{m\to\infty} \mathcal{E}(u_{k_m}) = \liminf_{m\to\infty} \mathcal{E}(u_m)$

Wiederhole alle Argumente mit u_{k_m} und finde eine TF (wieder (u_{k_m})) so dass

$$\liminf_{m\to\infty} \frac{1}{2}\int |Du_{k_m}|^2 \geq \frac{1}{2}\int |Du|^2$$

$$\lim_{m\to\infty} \int_\Omega g(x, u_{k_m}(x))\,dx = \int_\Omega g(x, u(x))\,dx$$

$$\Rightarrow \liminf_{m\to\infty} \mathcal{E}(u_m) = \lim_{m\to\infty} \mathcal{E}(u_{k_m})$$

$$\geq \liminf_{m\to\infty} \frac{1}{2}\int |Du_{k_m}|^2\,dx - \int_\Omega g(x, u_{k_m}(x))\,dx$$

$$\geq \frac{1}{2}\int |Du|^2\,dx - \int g(x, u(x))\,dx$$

$$= \mathcal{E}(u).$$

$\Longrightarrow \exists\, v \in \mathcal{M}' : \quad \mathcal{E}(v) = \inf_{w \in \mathcal{M}'} \mathcal{E}(w)$

(f) $\mathcal{M}'$ ist konvex denn

seien $u_1, u_2 \in \mathcal{M}'$

$\Rightarrow u_1 - u_0,\ u_2 - u_0 \in W_0^{1,2}(\Omega)$ und

$\underline{u} \leq u_1 \leq \bar{u} \qquad \underline{u} \leq u_2 \leq \bar{u}$

$\Rightarrow \underline{u} \leq t u_1 + (1-t) u_2 \leq \bar{u}$ und

$t u_1 + (1-t) u_2 - u_0$

$= t \underbrace{(u_1 - u_0)}_{\in W_0^{1,2}} + (1-t) \underbrace{(u_2 - u_0)}_{\in W_0^{1,2}} \in W_0^{1,2}$

$$\Longrightarrow 0 \leq \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \mathcal{E}(tu + (1-t)v)$$

$$= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \mathcal{E}(v + t(u-v))$$

$$= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \frac{1}{2}\int |D(v + t(u-v))|^2 - \int g(x, (v + t(u-v))(x))\, dx$$

$$= \int Dv\, D(u-v) - \int g(x, v(x))\, (u(x) - v(x))\, dx$$

(m) Sei $\varphi \in C_0^\infty(U)$

Z.z. $\int_\Omega \nabla u \nabla\varphi \, dx - \int_\Omega g(x, u(x))\, \varphi(x)\, dx = 0$

Bew $\forall\, |t| < \frac{\delta}{\|\varphi\|_\infty}$ $\quad v + t\varphi \in M'$

Denn

$$v + t\varphi - u_0 = \underbrace{(v - u_0)}_{\in W_0^{1,2}} + t\underbrace{\varphi}_{\in W_0^{1,2}} \in W_0^{1,2}(\Omega)$$

und

$$\underline{u} \leq \underline{u} + \delta - t\|\varphi\|_\infty$$

$$\leq v - t\|\varphi\|_\infty \leq v + t\varphi$$

$$\leq v + |t|\,\|\varphi\|_\infty \leq v + \delta$$

$$\leq \bar{u} - \delta + \delta \leq \bar{u}$$

$$\Longrightarrow 0 = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \mathcal{E}(v + t\varphi)$$

$$= \int_\Omega \nabla v \nabla\varphi - \int g(x, v(x))\, \varphi(x)\, dx$$

(d)

$$w_\varepsilon(x) = \begin{cases} \underline{u}(x) & x \in A_\varepsilon \\ \bar{u}(x) & x \in B_\varepsilon \\ v(x) + \varepsilon \varphi(x) & \end{cases}$$

$w_\varepsilon \in W^{1,2}(\Omega)$ da

$$w_\varepsilon = \max\{\underline{u}, \min\{\bar{u}, v + \varepsilon\varphi\}\}$$

$$\Rightarrow w_\varepsilon \in W^{1,2}(\Omega)$$

$$\underline{u} \le w_\varepsilon \le \bar{u} \quad \checkmark$$

$$(w_\varepsilon - u_0)^+$$

$$= (v + \varepsilon\varphi - u_0 - \max(v + \varepsilon\varphi - \bar{u}, 0)$$

$$- \min(v + \varepsilon\varphi - \underline{u}, 0))^+$$

$$\le (v - u_0)^+ + \varepsilon\varphi^+ - \min(0, v + \varepsilon\varphi - \underline{u})$$

$$\le (v - u_0)^+ + \varepsilon\varphi^+ - \min(0, (v - u_0) + \varepsilon\varphi - \underline{u} - u_0)$$

$$\le (v - u_0)^+ + \varepsilon\varphi^+ \underbrace{- \min(0, (v - u_0) + \varepsilon\varphi)}_{\le (v - u_0)^- + \varepsilon\varphi^-}$$

$$+ (\underline{u} - u_0)^+$$

$$\le (v - u_0)^{\pm} + \varepsilon\varphi^{\pm} + (\underline{u} - u_0)^+ \in W_0^{1,2}(\Omega)$$

Analog

$$(w_\varepsilon - u_0)^- = \big(v + \varepsilon\varphi - u_0 - \max(v+\varepsilon\varphi - \bar{u}, 0)$$
$$- \min(v + \varepsilon\varphi - \underline{u}, 0) \big)^-$$

$$\leq (u-u_0)^- + \varepsilon\varphi^- + \max(u - \bar{u} + \varepsilon\varphi, 0)$$

$$\leq (u-u_0)^- + \varepsilon\varphi^- + \max((u-u_0) + \varepsilon\varphi, 0)$$
$$+ (u_0 - \bar{u})^+ \leq (u-u_0)^- + \varepsilon\varphi^-$$
$$+ (u-u_0)^+ + \varepsilon\varphi^+ + (u_0 - \bar{u})^+$$
$$= |u - u_0| + \varepsilon|\varphi| + (u_0 - \bar{u})^+ \in W_0^{1,2}(\Omega)$$

(O) Straight forward.

(P) $$|A_\varepsilon| = \int_\Omega \chi_{A_\varepsilon}(y)\,dy = \int_\Omega \underbrace{\chi_{\{x\in\Omega \mid v(x)+\varepsilon\varphi(x) < \underline{u}(x)\}}(y)}\,dy$$
$$\to \chi_{\{x\in\Omega \mid v(x) \leq \underline{u}(x)\}} \overset{\text{f.ü.}}{=} \chi_\emptyset$$

$\Longrightarrow 0.$

Analog $|B_\varepsilon| \to 0.$

(q) $\displaystyle\int_{A_\varepsilon} g(x, v(x))\, \underbrace{(\underline{u}(x) - v(x))}_{|\,|\,\leq\, \varepsilon}\, dx$

$|\,|\leq \varepsilon$ denn

$v + \varepsilon\varphi \leq \underline{u} \leq v$ auf A_ε

$$\leq |A_\varepsilon|\, \varepsilon\, \|\varphi\|_\infty \sup_{(x,w)\in\overline{\Omega}\times[\underline{c},\overline{c}]} |g(x,w)| = o(\varepsilon)$$

Analog

$$\int_{B_\varepsilon} g(x, v(x))\, (\overline{u}(x) - v(x)) = o(\varepsilon)$$

(r) $\displaystyle\int_{A_\varepsilon} \nabla v(x)\, (\nabla\underline{u}(x) - \nabla v(x))$

$$= \int_{A_\varepsilon} \nabla v(x)\, (\nabla\underline{u}(x) - \nabla(v+\varepsilon\varphi)(x))\, dx$$

$$+ \underbrace{\varepsilon\int_{A_\varepsilon} \nabla v(x)\, \nabla\varphi(x)\, dx}_{=:T_\varepsilon}$$

$$= T_\varepsilon + \underbrace{(-1)\varepsilon\int_{A_\varepsilon} \nabla\varphi(x)\, (\nabla\underline{u}(x) - \nabla(v+\varepsilon\varphi)(x))\, dx}$$

$|\,| \leq \varepsilon\|\nabla\varphi\|_{L^2(A_\varepsilon)} (\|\nabla\underline{u} - \nabla v\|_{L^2} + \varepsilon\|\nabla\varphi\|_{L^2}) \leq \varepsilon\sqrt{|A_\varepsilon|}\, \|\nabla\varphi\|_{L^\infty}(\|\nabla u - \nabla v\|_{L^2} + \varepsilon\|\nabla\varphi\|)$

$= o(\varepsilon)$

$$+ \int_{A_\varepsilon} \nabla(v+\varepsilon\varphi)(x)\, (\nabla\underline{u}(x) - \nabla(v+\varepsilon\varphi)(x))\, dx$$

≤ 0

$$= T_\varepsilon + o(\varepsilon) + \overbrace{\int_{A_\varepsilon} (\nabla(v+\varepsilon\varphi)(x) - \nabla\underline{u}(x))\, (\nabla\underline{u}(x) - \nabla(v+\varepsilon\varphi)(x))\, dx}$$

$$+ \int_{A_\varepsilon} \nabla\underline{u}(x)\, (\nabla\underline{u}(x) - \nabla(v+\varepsilon\varphi)(x))\, dx$$

$$\le T_\varepsilon + o(\varepsilon) + 0 + \int_{A_\varepsilon} D\underline{u}(x)\,\big(D\underline{u}(x) - D(v+\varepsilon\varphi)(x)\big)\,dx$$

$$\le T_\varepsilon + o(\varepsilon) + \int_\Omega D\underline{u}(x)\,\underbrace{D(\underline{u} - v + \varepsilon\varphi)^+}\,dx$$

$\in W_0^{1,2}(\Omega)$ denn

$(\underline{u} - v + \varepsilon\varphi)^+$

$= (\underline{u} - u_0 + u_0 - v + \varepsilon\varphi)^+$

$\le (\underline{u} - u_0)^+ + (u_0 - v)^+ + \varepsilon\varphi^+ \in W_0^{1,2}$

$$\le T_\varepsilon + o(\varepsilon) + \int_\Omega \underbrace{g(x,\underline{u}(x))}_{\le \sup_{(x,w)\in\bar\Omega\times[\underline{c},\bar c]} |g(x,w)|}\ \underbrace{(\underline{u} - v + \varepsilon\varphi)^+}_{\le \varepsilon\|\varphi\|_\infty \chi_{A_\varepsilon}}$$

$$\le T_\varepsilon + o(\varepsilon) + C\,|A_\varepsilon|\,\varepsilon\|\varphi\|_\infty = o(\varepsilon) + T_\varepsilon$$

Analog

$$\int_{B_\varepsilon} Dv(x)\,\big(D\bar{u}(x) - Dv(x)\big)\,dx \le \varepsilon \int_{B_\varepsilon} Dv(x)\,D\varphi(x)\,dx + o(\varepsilon)$$

$\Longrightarrow$

$$0 \le \varepsilon \int_{A_\varepsilon} Dv(x)\,D\varphi(x) + \varepsilon \int_{B_\varepsilon} Dv(x)\,D\varphi(x)$$

$$+ o(\varepsilon) + \varepsilon \int_{C_\varepsilon} Dv(x)\,D\varphi(x) - \varepsilon \int_{C_\varepsilon} g(x, v(x))\,\varphi(x)\,dx$$

$$\le \varepsilon \int_\Omega Dv(x)\,D\varphi(x)\,dx - \varepsilon \int_\Omega g(x, v(x))\,\varphi(x)\,dx + o(\varepsilon)$$

$$\Rightarrow 0 \le \int_\Omega \nabla v(x) \nabla \varphi(x)\, dx - \int_\Omega g(x, v(x))\, \varphi(x)\, dx$$

$\varphi \mapsto -\varphi \Rightarrow$

$$\int_\Omega \nabla v(x) \nabla \varphi(x)\, dx - \int_\Omega g(x, v(x))\, \varphi(x)\, dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Aufgabe 11

(a) Es gilt für $x \in \Omega$

$$f(x) \le f(y) + [f]_{0,1} |x-y|$$

$$\le \max(g(y), f(y)) + \max([f]_{0,1}, [g]_{0,1}) |x-y|$$

Analog

$$g(x) \le g(y) + [g]_{0,1} |x-y| \le \max(g(y), f(y)) + \max([f]_{0,1}, [g]_{0,1}) |x-y|$$

$$\Rightarrow \max(f(x), g(x)) \le \max(f(y), g(y)) + \max([f]_{0,1}, [g]_{0,1}) |x-y|$$

$$\Rightarrow h(x) \le h(y) + \max([f]_{0,1}, [g]_{0,1}) |x-y|$$

Vertausche die Rollen von x, y $\quad h(y) \le h(x) + \max([f]_{0,1}, [g]_{0,1}) |x-y|$

$$\rightsquigarrow |h(x) - h(y)| \le \max([f]_{0,1}, [g]_{0,1}) |x-y|$$

$$\Rightarrow [h]_{0,1} \le \max([f]_{0,1}, [g]_{0,1})$$

Bem $Lip(\Omega)$ ist sogar Supremumsstabil.!

(b)

$$0 = \int_\Omega \left(\frac{Du}{\sqrt{1+|Du|^2}} - \frac{Dv}{\sqrt{1+|Dv|^2}} \right) \cdot (Du - Dv)$$

$$= \int_\Omega \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial_{x_i} u}{\sqrt{1+|Du|^2}} - \frac{\partial_{x_i} v}{\sqrt{1+|Dv|^2}} \right) (\partial_{x_i} u - \partial_{x_i} v)$$

$$= \sum_{i=1}^n \int_\Omega \int_0^1 \frac{d}{dt} \frac{\partial_{x_i}(v + t(u-v))}{\sqrt{1+|Dv+t(u-v)|^2}} \, dt \, (\partial_{x_i} u - \partial_{x_i} v)$$

$$= \sum_{i=1}^n \int_\Omega \int_0^1 \left(\frac{\partial_{x_i} u - \partial_{x_i} v}{\sqrt{1+|Dv+t(u-v)|^2}} - \frac{\partial_{x_i}(v+t(u-v)) \left(D(u-v) Dv + t |Du-Dv|^2 \right)}{\left(1+|Dv+t(u-v)|^2\right)^{3/2}} \right.$$

$$(\partial_{x_i} u - \partial_{x_i} v) \quad dx$$

$$= \int_\Omega \int_0^1 \frac{|Du - Dv|^2}{\sqrt{1+|Dv+t(u-v)|^2}} - \frac{\left(D(v+t(u-v)) \, D(u-v)\right) \left(D(u-v) Dv + t |Du-Dv|^2\right)}{\left(1+|Dv+t(u-v)|^2\right)^{3/2}}$$

$$= \int_\Omega \int_0^1 \frac{|Du-Dv|^2 \left(1+|Dv+t(u-v)|^2\right) - \left(D(v+t(u-v)) \, D(u-v)\right)^2}{\left(1+|Du+t(u-v)|^2\right)^{3/2}}$$

$$= \int_\Omega \int_0^1 \frac{1}{\left(1+|Dv+t(u-v)|^2\right)^{3/2}} \, dt \; |Du - Dv|^2 \, dx$$

$$+ \underbrace{\int \frac{|Du-Dv|^2 \, |Dv+t(u-v)|^2 - \left(D(v+t(u-v)) \cdot D(u-v)\right)^2}{\left(1+|D(v+t(u-v))|^2\right)^{3/2}}}_{\geq 0 \text{ nach Cauchy Schwarz}}$$

$$\geq \int_\Omega \left(\int_0^1 \frac{1}{\left(1+|Dv+t(u-v)|^2\right)^{3/2}} \, dt \right) |Du - Dv|^2 \, dx$$

$$\Rightarrow |Du - Dv|^2 = 0 \text{ a.e.} \Rightarrow |D(u-v)| = 0 \text{ a.e. auf } \Omega \underset{\Omega \text{ offen}}{\overset{u-v \in W^{1,\infty}(\Omega)}{\Longrightarrow}} u - v = \text{const.}$$

$u \in Lip(\Omega) \cap C^1(\Omega)$

(c) $|u(x) - u(y)|$

$= \left| \int_0^1 \frac{d}{dt} u(x + t(y-x)) \, dt \right|$

$\leq \left| \int_0^1 \nabla u(x + t(y-x)) \, (y-x) dt \right|$

$\leq \|\nabla u\|_{\infty, \overline{xy}} \|y - x\|$ $\qquad \overline{xy} := \{ tx + (1-t) y \mid t \in [0,1] \}$

$\Rightarrow [u]_{C^{0,1}} \leq \|\nabla u\|_{\infty, \overline{xy}} \leq \|\nabla u\|_{\infty}$

$u \in Lip(\Omega)$ seien $x, y \in \Omega$

$\Rightarrow \exists \, \varepsilon > 0 : \overline{xy} \subset \Omega_\varepsilon := \{ z \in \Omega \mid dist(z, \Omega^c) \geq \varepsilon \}$

$\Rightarrow |u(x) - u(y)| = \lim_{\substack{\delta \to 0 \\ \delta < \varepsilon}} |(u * \varphi_\delta)(x) - (u * \varphi_\delta)(y)|$

$\leq \|\nabla (u * \varphi_\delta)\|_\infty |x - y|$

$= \| (\nabla u) * (\varphi_\delta) \|_\infty \quad |x - y|$

$= \sup_{z \in \overline{xy}} \left| \int \nabla u(w) \, \varphi_\delta (z - w) \, dw \right|$

$\leq \sup_{z \in \overline{xy}} \int |\nabla u(w)| \, \varphi_\delta (z - w) \, dw$

$\leq \sup_{z \in \overline{xy}} \|\nabla u\|_\infty \int \varphi_\delta (z - w) \, dw$

$= \|\nabla u\|_\infty$

(d) $u, v \in Lip(\Omega)$: $u|_{\partial\Omega} = v|_{\partial\Omega}$

Z $u - v \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Sei (φ_k) Standard-Mollifier mit $\operatorname{supp} \varphi_k \subset \overline{B_{\frac{1}{k}}(0)}$

Sei $m \in \mathbb{N}$

$\left(u - v - \frac{1}{m}\right)^+$ hat kompakten Träger in Ω

$\Longrightarrow$ $\left(u - v - \frac{1}{m}\right)^+ * \varphi_k$ hat für k groß genug kompakten Träger in Ω da $\operatorname{supp}\left(u - v - \frac{1}{m}\right)^+ * \varphi_k \subseteq \operatorname{supp}\left(u - v - \frac{1}{m}\right)^+ + \overline{B_{\frac{1}{k}}(0)}$

d.h. $\operatorname{supp}\left(\left(u - v - \frac{1}{m}\right)^+ * \varphi_k\right) \subset \Omega_{\varepsilon_0}$ für ein $\varepsilon_0 > 0$

<u>Auf Ω_{ε_0}</u>

$\left(u - v - \frac{1}{m}\right)^+ * \varphi_k \xrightarrow{k \to \infty} \left(u - v - \frac{1}{m}\right)^+$ in $W^{1,2}(\Omega_{\varepsilon_0})$

Da, ~~sonst~~ beide Fkt $= 0$ auf $\Omega \setminus \Omega_{\varepsilon_0}$

$\underbrace{\left(u - v - \frac{1}{m}\right)^+ * \varphi_k}_{\in C_0^\infty(\Omega)} \xrightarrow{k \to \infty} \left(u - v - \frac{1}{m}\right)^+$ in $W^{1,2}(\Omega)$

$\Longrightarrow \left(u - v - \frac{1}{m}\right)^+ \in W_0^{1,2}(\Omega)$

Nun

$\left(u - v - \frac{1}{m}\right)^+ \xrightarrow{W^{1,2}} (u - v)^+$ denn

$D_j\left(u - v - \frac{1}{m}\right)^+ = D_j(u - v)\, \chi_{u - v > \frac{1}{m}}$

$\xrightarrow[\text{+ } L^2 \text{ Majorante}]{\text{punktweise}} D_j(u - v)\, \chi_{u - v > 0} = D_j (u - v)^+$

also auch in L^2

$\Longrightarrow (u-v)^+$ ist in $W_0^{1,2}(\Omega)$ als $\overset{W^{1,2}}{\text{Grenzwert}}$ von

$W_0^{1,2}(\Omega)$ - Funktionen.

<u>Analog</u> $(u-v)^- = (v-u)^+ \in W_0^{1,2}(\Omega)$

$\Longrightarrow (u-v) = (u-v)^+ - (u-v)^- \in W_0^{1,2}(\Omega)$