Prof. Dr.Anna Dall'Acqua
Marius Müller
Wintersemester 2017/18
Punktzahl: keine

Übungen Variationsrechnung: Blatt 3

9. (Variationsungleichungen und Hilberträume)

(a) Es sei H ein reeller Hilbertraum und $K \subset H$ konvex und abgeschlossen. Zeige: Dann gibt es genau ein $x \in K$ sodass

$$||x|| = \inf_{y \in K} ||y|| \tag{1}$$

Anmerkung: Der Beweis lässt sich entweder mit etwas Funktionalanalysis führen oder mit der Theorie aus der Vorlesung.

(b) Es seien H und $K \subset H$ genau wie in (a). Zeige das Element $x \in K$ aus Teilaufgabe(a) die folgende Ungleichung löst:

$$\langle x, y - x \rangle \geq 0. \tag{2}$$

Anmerkung: Wieder mal kann man entweder die Techniken aus der Vorlesung oder einen Satz aus der Funktionalanalysis-Vorlesung verwenden.

(c) Es sei H ein reeller Hilbertraum. Zeige dass für $x' \in H'$ das Funktional $\mathcal{E} : H \to \mathbb{R}$ definiert durch $\mathcal{E}(u) = \frac{1}{2}||u||^2 - x'(u)$ ein eindeutiges Minimum $v \in H$ besitzt und folgere, dass

$$x'(u) = \langle v, u \rangle \quad \forall u \in H. \tag{3}$$

Bemerkung: Bewiesen hast du hiermit den sogenannten Darstellungssatz von Riesz-Frechét und noch mehr: Du hast das darstellende Element genauer charakterisiert.

(d) Verwende Variationsmethoden, um den Satz über das Proximum zu Beweisen.

10. (Die Perron-Methode und das Maximumsprinzip)

Für diese Aufgabe sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes C^2-glatt berandetes Gebiet. Aufgaben (a) bis (g) entwickeln einige Methoden zu Verbandsoperationen für Sobolevräume und erklären das grundsätzliche schwache Maximumsprinzip. In den Aufgaben (h) bis (s) lösen eine nichtlineare partielle Differentialgleichung mit der Perron-Methode. Ist man nur an der Lösung des Problems interessiert, dann könnte man auch die Aussagen der Aufgaben (a) bis (g) zunächst akzeptieren und im Zweifelsfall zurückspringen.

(a) Sei $u \in W^{1,2}(\Omega)$. Vergewissere dich noch einmal, dass du aus Aufgabe 5 auf Blatt 2 noch weißt, dass es $(u_n) \subset C^1(\mathbb{R}^n) \cap W^{1,2}(\Omega)$ gibt so, dass $u_n \to u$ in $W^{1,2}(\Omega)$.

(b) Beweise, dass für jedes $m \in \mathbb{N}$ gilt, dass $\sqrt{u^2 + \frac{1}{m}} \in W^{1,2}(\Omega)$ und folgere daraus, dass $|u| \in W^{1,2}(\Omega)$. Was ist die schwache Ableitung von $|u|$?

(c) Zeige, dass für $u \in W^{1,2}(\Omega)$ stets gilt, dass $u^+ := \max(u, 0), u^- := -\min(u, 0) \in W^{1,2}(\Omega)$. Zeige, dass die schwache Ableitung fast überall folgende Gleichung erfüllt:

$$D_{x_j} u^+ = (D_{x_j} u) \cdot \chi_{u>0} \quad D_{x_j} u^- = -(D_{x_j} u) \cdot \chi_{u<0} \tag{4}$$

Folgere, dass für $u, v \in W^{1,2}(\Omega)$ stets gilt, dass $\max(u, v), \min(u, v) \in W^{1,2}(\Omega)$

(d) Beweise das sogenannte Lemma von Stampacchia: Für $u \in W^{1,2}(\Omega)$ gilt $\nabla u = 0$ fast überall auf $\{x \in \Omega : u(x) = 0\}$

(e) Es sei $u \in W^{1,2}(\Omega)$. Wir schreben $u \leq 0$ auf $\partial\Omega$ falls $\max(u, 0) \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Wir nennen $u \in W^{1,2}(\Omega)$ eine schwache Sublösung des sog. Dirichlet-Laplace-Problems

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{in } \Omega \\ \quad u = 0 & \text{auf } \partial\Omega \end{cases} \tag{5}$$

falls $u \leq 0$ auf $\partial\Omega$ und für alle $\phi \in W_0^{1,2}(\Omega)$ mit $\phi \geq 0$ f.ü. gilt

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \phi dx \leq 0 \tag{6}$$

Zeige, dass jede (schwache) Sublösung des Dirichlet-Laplace-Problem auf Ω fast überall nichtpositiv ist. **Anmerkung:** Das nennt man das schwache Maximumsprinzip.

(f) Lies dir zunächst das folgende Resultat mit Beweisskizze durch und fülle die Lücken, wenn du magst:

Satz: Es sei $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ so, dass $u \geq 0$ fast überall. Sei $v \in W^{1,2}(\Omega)$ derart, dass $0 \leq v \leq u$ fast überall. Dann ist $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$.

Beweisskizze: Wähle zunächst einen Repräsentanten von u so, dass $0 \leq v \leq u$ überall gilt. Es sei $(\eta_n) \subset C_0^\infty(\Omega)$ so, dass $\eta_n \to u$ in $w^{1,2}(\Omega)$ und punktweise f.ü. (Warum kann man die finden?). Man muss zunächst nachrechnen, dass $\min(\eta_n, v)$ gegen v in $W^{1,2}(\Omega)$ konvergiert. Für Konvergenz in L^2 hilft man sich mit den Satz von Lebesgue und für Konvergenz der Ableitungen benutzt man die Formel in Teilaufgabe (c). Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist nun $\min(\eta_n, v)$ eine $W^{1,2}(\Omega)$-Funktion mit kompaktem Träger in Ω. Nimmt man Mollifier ϕ_{l_n} mit genügend kleinem Support so kann man erreichen, dass $\min(\eta_n, v) * \phi_{l_n} \in C_0^\infty(\Omega)$. Verkleinert man den Support noch mehr, so kann man dazu noch erreichen, dass $|| \min(\eta_n, v) * \phi_{l_n} - \min(\eta_n, v)||_{W1,2(\Omega)} \leq \frac{1}{n}$. Mit der Dreiecksungleichung kann man jetzt zeigen dass $\min(\eta_n, v) * \phi_{l_n} \to v$ für $n \to \infty$ in $W^{1,2}(\Omega)$. Damit liegt v im Abschluss von $C_0^\infty(\Omega)$, also in $W_0^{1,2}(\Omega)$.

(g) Zeige: Ist $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ mit $u \geq 0$ f.ü. und $v \in W^{1,2}(\Omega)$ auch mit $v \geq 0$ f.ü., so ist $\min(u, v) \in W_0^{1,2}(\Omega)$.

Im Folgenden wollen wir mit den eben entwickelten Techniken eine schwache Lösung der Gleichung

$$(P) \qquad \begin{cases} -\Delta u(x) = g(x, u(x)) & x \in \Omega \\ \quad u(x) = u_0(x) & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{7}$$

finden. Hierzu sei $g = g(x, u)$ reellwertig und stetig auf $\Omega \times \mathbb{R}$ und $u_0 \in W^{1,2}(\Omega)$. Wir sagen, dass $u \in W^{1,2}(\Omega)$ eine **(schwache) Sublösung** von (P) ist falls $u - u_0 \leq 0$ auf $\partial\Omega$ und

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \phi dx - \int_\Omega g(x, u(x))\phi(x) dx \leq 0 \quad \forall \phi \in W_0^{1,2}(\Omega) : \phi \geq 0, \text{ f.ü..} \tag{8}$$

Dazu sagen wir, dass u eine **(schwache) Superlösung** von (P) ist, falls $u_0 - u \leq 0$ auf $\partial\Omega$ und

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \phi dx - \int_\Omega g(x, u(x))\phi(x) dx \geq 0 \quad \forall \phi \in W_0^{1,2}(\Omega) : \phi \geq 0 \text{ f.ü.} \tag{9}$$

Wir sagen, dass u eine **(schwache) Lösung** von (P) ist falls $u - u_0 \in W_0^{1,2}(\Omega)$ und

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \phi dx - \int_\Omega g(x, u(x))\phi(x) dx = 0 \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega). \tag{10}$$

Für den Rest dieser Aufgabe definiere weiterhin

$$G(x, w) := \int_0^w g(x, v) dv. \tag{11}$$

(h) Definiere auf $M := \{u \in W^{1,2}(\Omega) : u - u_0 \in W_0^{1,2}(\Omega)\}$ das Funktional $\mathcal{E} : M \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\mathcal{E}(u) := \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 - \int_\Omega G(x, u(x)) dx \tag{12}$$

Zeige: Falls es $v \in M$ gibt so, dass $\mathcal{E}(v) = \inf_{u \in M} \mathcal{E}(u)$, so ist v eine schwache Lösung von (P).

(i) Zeige, dass M eine schwach abgeschlossene Menge des reflexiven Banachraumes $W^{1,2}(\Omega)$ ist.

(j) Sei für diese Teilaufgabe $u_0 = 0$ und $g(x, u) = Cu$. Zeige, dass es $C_0 > 0$ gibt so, dass $\mathcal{E}$ zwar für $C < C_0$ koerziv ist, aber nicht für $C > C_0$.

Anmerkung: Hier würde ich die folgende Definition von Koerzivität verwenden: $\mathcal{E}$ heißt koerziv falls für jede Folge $(u_n) \subset M$ mit $||u_n||_{W^{1,2}} \to \infty$ gilt, dass $\mathcal{E}(u_n) \to \infty$ für $n \to \infty$.

(k) Angenommen es gibt eine Superlösung $\overline{u}$ von (P) und eine Sublösung $\underline{u}$ von (P) mit reellen Konstanten $\underline{c}$ und $\overline{c}$ so, dass $\underline{c} \leq \underline{u} \leq \overline{u} \leq \overline{c}$ fast überall. Sei $M' := \{u \in M | \underline{u} \leq u \leq \overline{u} \text{ f.ü.}\}$. Zeige, dass es $v \in M'$ gibt so, dass $\mathcal{E}(v) = \inf_{w \in M'} \mathcal{E}(w)$.

(l) Im Folgenden wollen wir zeigen, dass das soeben gefundene v eine schwache Lösung von (P) ist. Zeige hierzu, dass für jedes $u \in M'$ die folgende Variationsungleichung erfüllt ist:

$$0 \leq \int_\Omega \nabla v \nabla (u - v) dx - \int_\Omega g(x, v(x))(u(x) - v(x)) dx \quad \forall u \in M' \tag{13}$$

(m) Angenommen es gibt eine Offene Menge $U \subset \Omega$ und $\delta > 0$ so , dass $\underline{u}(x) + \delta < v(x) < \overline{u}(x) - \delta$ für fast alle $x \in U$. Dann ist (10) für alle $\phi \in C_0^\infty(U)$ erfüllt.

(n) Es sei $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ und $\epsilon > 0$. Definiere $A_\epsilon := \{x \in \Omega | \ v(x) + \epsilon\phi(x) < \underline{u}(x)\}$ und $B_\epsilon := \{x \in \Omega | \ v(x) + \epsilon\phi(x) > \overline{u}(x)\}$ und setze

$$w_\epsilon(x) := \begin{cases} \underline{u}(x) & x \in A_\epsilon \\ \overline{u}(x) & x \in B_\epsilon \\ v(x) + \epsilon\phi(x) & \text{sonst} \end{cases} \tag{14}$$

Zeige, dass $w_\epsilon \in W^{1,2}(\Omega)$ und zeige, dass die schwache Ableitung gegeben ist durch

$$\nabla w_\epsilon(x) := \begin{cases} \nabla\underline{u}(x) & x \in A_\epsilon \\ \nabla\overline{u}(x) & x \in B_\epsilon \\ \nabla v(x) + \epsilon\nabla\phi(x) & \text{sonst} \end{cases} \tag{15}$$

Schließe daraus, dass $w_\epsilon \in M'$. (Zu zeigen, dass $w_\epsilon - u_0 \in W_0^{1,2}(\Omega)$ ist etwas technisch und sollte hier zumindest von den Teilnehmern der VL, die PDE noch nicht gehört haben, ohne Beweis vorausgesetzt werden. Ich werde es in der Übung unter Benutzung von Teilaufgabe (f) vorrechnen und wer mag, kann gerne mit mir im Büro diskutieren!). Der Einfachheit halber definieren wir für den Rest der Aufgabe noch $C_\epsilon := \Omega \setminus (A_\epsilon \cap B_\epsilon)$

(o) Setze w_ϵ in (13) und zeige damit

$$\begin{aligned} 0 \quad \leq \quad & \epsilon \int_{C_\epsilon} (\nabla v(x) \nabla\phi(x) - g(x, v(x))\phi(x)) \, dx \\ & + \int_{B_\epsilon} \nabla v(x) \nabla(\overline{u} - v)(x) dx - \int_{B_\epsilon} g(x, v(x))(\overline{u} - v) dx \\ & + \int_{A_\epsilon} \nabla v(x) \nabla(\underline{u} - v)(x) dx - \int_{A_\epsilon} g(x, v(x))(\underline{u} - v) dx \end{aligned} \tag{16}$$

(p) Zeige, dass das Lebsegue-Maß von A_ϵ, B_ϵ gegen Null konvergiert.

(q) Zeige, dass der dritte und der fünfte Summand Elemente von $o(\epsilon)$ sind.

(r) Zum vierten Term: Schreibe

$$\int_{A_\epsilon} \nabla v(x) \nabla(\underline{u} - v)(x) dx = \int_{A_\epsilon} \nabla v(x) \nabla(\underline{u} - (v + \epsilon\phi))(x) dx + \epsilon \int_{A_\epsilon} \nabla v \nabla\phi dx \tag{17}$$

Zeige, dass hier der erste Summand $o(\epsilon)$ ist und verrechne den zweiten Summanden mit dem ersten Summanden von (16). Verfahre ähnlich mit dem zweiten Summanden von (16).

(s) Teile (16) durch ϵ und lasse ϵ gegen Null streben um zu zeigen, dass für jedes $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ gilt, dass

$$\int_\Omega \nabla u \nabla\phi dx - \int_\Omega g(x, u(x))\phi(x) dx \geq 0. \tag{18}$$

Warum gilt auch die umgekehrte Ungleichung?

11. (Lipschitz-Funktionen und die Minimalflächengleichung)

Sei stets $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt.

(a) Es seien $f, g \in Lip(\Omega)$. Dann ist $h := \max(f, g) \in Lip(\Omega)$ mit $[h]_{0,1} \leq \max([f]_{0,1}, [g]_{0,1})$.

(b) Es seien $u, v \in Lip(\Omega)$ so, dass $u_{|\partial\Omega} = v_{|\partial\Omega}$ und für alle $\phi \in Lip(\Omega)$ mit $\phi_{|\partial\Omega} = 0$ gilt

$$\int_\Omega \frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \nabla\phi \, dx = \int_\Omega \frac{\nabla v}{\sqrt{1 + |\nabla v|^2}} \nabla\phi \, dx \tag{19}$$

Zeige, dass dann $v = u$.

(c) Sei Ω konvex und $u \in Lip(\Omega) \cap C^1(\Omega)$. Dann gilt $[u]_{0,1} \leq ||\nabla u||_\infty$. Gilt dies auch für $u \in Lip(\Omega)$?

(d) Es seien $u, v \in Lip(\Omega)$ so dass $u_{|\partial\Omega} = v_{|\partial\Omega}$. Zeige: Dann ist $u - v \in W_0^{1,2}(\Omega)$.