Cheat Sheet

Der Laplace Operator

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{n} \partial^2_{x_i x_i} u$$

u heißt auf Ω harmonisch falls

$u \in C^2(\Omega)$ und $\Delta u \overset{(x)}{=} 0 \quad \forall x \in \Omega$

Green's Identitäten $\quad \Delta = \operatorname{div}(\operatorname{grad} u)$

$u \in C^2(\bar{\Omega})$, $v \in C^2(\bar{\Omega})$ $\quad \Omega$ C^1-glatt berandet

$$(1) \quad \int_{\Omega} \Delta u \, v \, dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} v \, dS - \int_{\Omega} \nabla u \nabla v \, dx$$

$$(2) \quad \int_{\Omega} (\Delta u v - \Delta v u) \, dx = \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} v - \frac{\partial v}{\partial \nu} u \right) dS(x)$$

Weyl's Lemma

$u \in L^1_{loc}(\Omega)$: $\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$

$\int u \Delta \varphi \, dx = 0$

$\Longrightarrow u \in C^\infty(\Omega)$ und $\Delta u = 0$

Holomorph & Harmonisch

f holomorph auf Ω

$\Longrightarrow$ Re f, Im f harmonisch auf Ω

Mittelwerteigenschaft, $\underset{\text{auf } \Omega}{\Delta u = 0}$

$$\Rightarrow u(x) = \frac{1}{|\partial B_r(x)|} \int_{\partial B_r(x)} u(y) \, dS(y)$$

$\forall x \; \forall r > 0 : \overline{B_r(x)} \subset \Omega$

Dirichlet-Problem

$$(1) \text{ Klassisch } \underset{(DP)}{} \begin{cases} \Delta u = 0 \\ u|_{\partial\Omega} = g \end{cases} \qquad u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$$

(2) schwach $u \in \cancel{H}^1 W^{1,2}(\Omega)$

$$\begin{cases} \cancel{\Delta u} \int \nabla u \nabla \varphi \, dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega). \\ (u-g) \in W_0^{1,2}(\Omega) \end{cases}$$

→ Weyl's Lemma: Jede schwache Lösung ist $C^\infty(\Omega)$ aber nicht jede schwache Lösung ist $C(\bar{\Omega})$.

Satz 6.74 Arendt, Urban

Aquivalent

(i) Zu jedem $g \in C(\partial\Omega)$ gibt es eine klassische Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$

(ii) In jedem Punkt $z \in \partial\Omega$ gibt es $r > 0$ und $b \in C(\Omega \cap B_r(z))$:

- $\forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega \cap B_r(z))$ $\int_\Omega b(x) \Delta\varphi(x) dx \leq 0$
- $b(x) > 0$ $\forall x \in \overline{\Omega \cap B_r(z)} : x \neq z$
- $b(z) = 0$