A13 e)

$0 \le \varphi_1 < \varphi_2 < \varphi_3 < 2\pi$ und

$0 \le \psi_1 < \psi_2 < \psi_3 < 2\pi$

z.z. $\exists!$ h Automorphismus der Einheitskreisscheibe sodass

$h(e^{i\varphi_j}) = e^{i\psi_j} \quad \forall j = 1, 2, 3.$

Existenz 1) Zunächst sei $\varphi_1 = \psi_1$, $\varphi_2 = \psi_2$, $\varphi_3 \neq \psi_3$

$$h(z) = e^{i\varphi} \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \qquad a \in \mathbb{C},\ |a|<1$$
$$\varphi \in [0, 2\pi)$$

$$h(e^{ix}) = e^{i\varphi} \frac{e^{ix}-a}{1-\bar{a}e^{ix}}$$

$$= \frac{e^{i\varphi}}{e^{ix}} \frac{e^{ix}-a}{e^{-ix}-\bar{a}}$$

$h(e^{i\varphi_1}) = e^{i\psi_1}$ d.h

$$e^{i(\varphi-\varphi_1)} \frac{e^{i\varphi_1}-a}{e^{-i\varphi_1}-\bar{a}} = e^{i\varphi_1}$$

$$\Longrightarrow \quad e^{i(\varphi-\varphi_1)} (e^{i\varphi_1}-a) = 1 - \bar{a}\, e^{i\varphi_1}$$

$$\Rightarrow \bar{a} = e^{-i\varphi_1} - e^{i(\varphi - 2\varphi_1)} \left(e^{i\varphi_1} - a \right)$$

$$= e^{-i\varphi_1} - e^{i(\varphi - \varphi_1)} + a\, e^{i(\varphi - 2\varphi_1)} \qquad (I)$$

<u>Analog</u>

$$\bar{a} = e^{-i\varphi_2} - e^{i(\varphi - \varphi_2)} + a\, e^{i(\varphi - 2\varphi_2)} \qquad (II)$$

$$(I) = (II) \Longrightarrow \; e^{-i\varphi_1} - e^{i(\varphi - \varphi_1)} + a\, e^{i(\varphi - 2\varphi_1)}$$

$$= e^{-i\varphi_2} + e^{i(\varphi - \varphi_2)} + a\, e^{i(\varphi - 2\varphi_2)}$$

$$\Rightarrow a e^{i\varphi} \left(e^{-2i\varphi_1} - e^{-2i\varphi_2} \right) = \left(1 - e^{i\varphi} \right) \left(e^{-i\varphi_2} - e^{-i\varphi_1} \right) \qquad (*)$$

<u>Fall 1</u> $\quad \varphi_2 = \pi + \varphi_1 \qquad$ dann $(\varphi_1 < \pi)$.

$$\Rightarrow 0 = \left(1 - e^{i\varphi} \right) \left(e^{-i\varphi_2} - e^{-i\varphi_1} \right)$$

$$\Rightarrow \varphi = 0$$

und

$$\overline{a} = e^{-i\varphi_2} - e^{-i\varphi_2} + a\, e^{2i\varphi_2}$$

$$= a\, e^{2i\varphi_2}$$

$\arg \in [0, 2\pi]$

$$2\pi - \arg a = \arg(a\, e^{2i\varphi_2}) = \arg(a\, e^{2i\varphi_1}) = \arg a + 2\varphi_1$$

$$\arg a = 2(\pi - \varphi_1)$$

Finde r so dass

$$\cancel{e^{i\varphi_3}} \frac{1 - r e^{2i(\pi - \varphi_1)} e^{i\varphi_3}}{1 - r e^{2i(\varphi_1 - \pi)} e^{i\varphi_3}} = e^{i\varphi_3}$$

(Eindeutig!)

<u>Fall 2</u> $\varphi_2 \neq \pi + \varphi_1$

$$(*) \implies a = \frac{1 - e^{i\varphi}}{e^{i\varphi}} \frac{e^{-i\varphi_2} - e^{-i\varphi_1}}{e^{-2i\varphi_1} - e^{-2i\varphi_2}}$$

$$= (e^{-i\varphi} - 1) \frac{(-1)}{e^{-i\varphi_1} + e^{-i\varphi_2}}$$

$$= \frac{1 - e^{-i\varphi}}{e^{-i\varphi_1} + e^{-i\varphi_2}}$$

Now

$$e^{i(\varphi-\varphi_3)} \frac{e^{i\varphi_3}-a}{e^{-i\varphi_3}-a} = e^{i\psi_3}$$

$$\Rightarrow e^{i\psi_3} = e^{i(\varphi-\varphi_3)} \frac{e^{i\varphi_3} - \frac{1-e^{-i\varphi}}{e^{i\varphi_1}+e^{i\varphi_2}}}{e^{-i\varphi_3} - \frac{1-e^{i\varphi}}{e^{-i\varphi_1}+e^{-i\varphi_2}}}$$

$$= \frac{e^{i\varphi} - (e^{i\varphi}-1)\frac{e^{-i\varphi_3}}{e^{i\varphi_1}+e^{i\varphi_2}}}{e^{-i\varphi_3} - \frac{1}{e^{-i\varphi_1}+e^{-i\varphi_2}} + e^{i\varphi}\frac{1}{e^{-i\varphi_1}+e^{-i\varphi_2}}}$$

$$\Rightarrow e^{i\varphi}\left[\frac{e^{i\psi_3}}{e^{-i\varphi_1}+e^{-i\varphi_2}}\right] + e^{i(\psi_3-\varphi_3)} - \frac{e^{i\psi_3}}{e^{-i\varphi_1}+e^{-i\varphi_2}}$$

$$= e^{i\varphi}\left[1 - \frac{e^{-i\varphi_3}}{e^{i\varphi_1}+e^{i\varphi_2}}\right] + \frac{e^{-i\varphi_3}}{e^{i\varphi_1}+e^{i\varphi_2}}$$

$$\Rightarrow e^{i\varphi}\left[-1+\frac{e^{i\psi_3}}{e^{-i\varphi_1}+e^{-i\varphi_2}}+\frac{e^{-i\varphi_3}}{e^{i\varphi_1}+e^{i\varphi_2}}\right]$$

$$= e^{-i(\psi_3-\varphi_3)}+\frac{e^{i\psi_3}}{e^{-i\varphi_1}+e^{-i\varphi_2}}+\frac{e^{-i\varphi_3}}{e^{i\varphi_1}+e^{i\varphi_2}}$$

(**)

Nun

$$-1+\frac{e^{i\psi_3}}{e^{-i\varphi_1}+e^{-i\varphi_2}}+\frac{e^{-i\varphi_3}}{e^{i\varphi_1}+e^{i\varphi_2}}\neq 0$$

denn

$$\frac{e^{i\psi_3}}{e^{-i\varphi_1}+e^{-i\varphi_2}}+\frac{e^{-i\varphi_3}}{e^{i\varphi_1}+e^{i\varphi_2}}$$

$$=\frac{e^{i\psi_3}\left(e^{i\varphi_1}+e^{i\varphi_2}\right)+e^{-i\varphi_3}\overline{\left(e^{i\varphi_1}+e^{i\varphi_2}\right)}}{2-2\,\mathrm{Re}\,e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}}$$

$$\Rightarrow \arg\left(\frac{e^{i\psi_3}}{e^{-i\varphi_1}+e^{-i\varphi_2}}+\frac{e^{-i\varphi_3}}{e^{i\varphi_1}+e^{i\varphi_2}}\right)$$

$$=\frac{\psi_3+\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}+(-\varphi_3)+\left(-\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}\right)}{2}=\frac{\psi_3-\varphi_3}{2}\neq 0$$

$\Longrightarrow \exists!$ Lösung von $(**)$ für φ

Nun

Analog gilt selbiges für

$$\psi_1 \neq \varphi_1 \qquad \psi_2 = \varphi_2 \qquad \psi_3 = \varphi_3$$

und

$$\psi_1 = \varphi_1 , \quad \psi_2 \neq \varphi_2 , \quad \psi_3 = \varphi_3$$

$\Longrightarrow \exists\ h_1, h_2, h_3$

$$\begin{matrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{matrix} \underset{h_1}{\rightsquigarrow} \begin{matrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \psi_3 \end{matrix} \underset{h_2}{\rightsquigarrow} \begin{matrix} \varphi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{matrix} \underset{h_3}{\rightsquigarrow} \begin{matrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{matrix}$$

$h_3 \circ h_2 \circ h_1$ tut's

Eindeutigkeit

Seien h_1, h_2 Automorphismen der Kreisscheibe mit

$$h_k(e^{i\varphi_j}) = e^{i\psi_j} \qquad \forall k=1,2 \ \forall j=1,2,3$$

$$\Rightarrow h_1 \circ h_2^{-1}(e^{i\varphi_j}) = e^{i\varphi_j} \quad \forall j=1,2,3$$

Nun $\tilde{h} = h_1 \circ h_2^{-1}$ ist auch Automorphismus der Kreisscheibe. Wie oben

$$\tilde{h}(z) = e^{i\varphi} \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \qquad a \in \mathbb{C} \quad |a| < 1, \quad \varphi \in [0, 2\pi]$$

Wie oben

$$a = \frac{1-e^{i\varphi}}{e^{i\varphi_1}+e^{i\varphi_2}} \qquad \text{und}$$

$$e^{i(\varphi-\varphi_3)} \frac{e^{i\varphi_3}-a(\varphi)}{\bar{e}^{i\varphi_3}-\bar{a}(\varphi)} = e^{i\varphi_3} \qquad (\ast\ast\ast)$$

($\ast\ast\ast$) hat höchstens eine Lösung da ~~…~~ linear in ~~…~~ $e^{i\varphi}$)

$\underline{\varphi = 0}$ $\Rightarrow a = 0$

$$e^{-i\varphi_3} \frac{e^{i\varphi_3}}{e^{-i\varphi_3}} = e^{i\varphi_3} \quad \checkmark$$

$\Rightarrow \varphi = 0$ und $a = 0$

$\Rightarrow \hat{h} = id$