Universität Ulm

Abgabe: Donnerstag, 23.11.2017

Prof. Dr.Anna Dall'Acqua
Marius Müller
Wintersemester 2017/18
Punktzahl: keine

Übungen Variationsrechnung: Blatt 4

12. (Der Spuroperator)

In der Vorlesung reden wir derzeit von $F \in W^{1,2}(B_1(0))$ so, dass $F_{|\partial B_1(0)} \in C^0(\partial B_1(0))$. Eine Sobolevfunktion auf den Rand einzuschränken macht aber a priori keinen Sinn, denn $W^{1,2}(\Omega)$-Funktionen sind nicht zwingend stetig auf dem Abschluss von Ω. Was wir mit dieser Einschränkung meinen, wollen wir hier diskutieren. Sei für den Rest der Aufgabe $B = B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$.

(a) Zeige: Für $u \in W^{1,2}(B) \cap C^1(\overline{B})$ gilt

$$||u||_{L^2(\partial B)} \leq C||u||_{W^{1,2}(B)} \tag{1}$$

Hinweis: Meine Lösung fängt so an:

$$\int_{\partial B} u^2(x)dS(x) = \int_{\partial B} u^2(x)(x \cdot \nu_{\partial B}(x))dS(x) \tag{2}$$

wobei ich mit ν die äußere Normale meine.

(b) Zeige, dass es einen beschränkten linearen Operator $tr : W^{1,2}(B) \to L^2(\partial B)$ gibt so, dass $tr(u) = u_{|\partial B}$ für alle $u \in W^{1,2}(B) \cap C^1(\overline{B})$.

(c) Zeige, dass $tr(u) = u_{|\partial B}$ sogar gilt für $u \in W^{1,2}(B) \cap C^0(\overline{B})$.

Hinweis: Wäre $u \in W^{1,2}(B_{1+\epsilon}(0)) \cap C(\overline{B_{1+\epsilon}(0)})$ so könnte man u durch Faltung zum einen in $W^{1,2}$ und zum anderen auch gleichmäßig durch $W^{1,2}(B) \cap C^1(\overline{B})$-Funktionen approximieren. Unser Forstetzungsresultat mag uns vielleicht eine Fortsetzung unserer Funktion in $W^{1,2}(B_{1+\epsilon}(0))$ erlauben, dass diese aber auch stetig ist a priori nicht klar. Etwas anderes hilft uns: Für $\epsilon > 0$ ist $v_\epsilon(x) := u\left(\frac{x}{1+\epsilon}\right)$ in $W^{1,2}(B_{1+\epsilon}(0)) \cap C(\overline{B_{1+\epsilon}(0)})$.

(d) Zeige, dass $tr(u) = 0$ für alle $u \in W_0^{1,2}(B)$

BONUS (aber eigentlich nicht übermäßig schwer): Wir wollen noch zeigen, dass aus $tr(u) = 0$ auch folgt, dass $u \in W_0^{1,2}(B)$.

(e) BONUS: Zeige zunächst $tr(|u|) = |tr(u)|$.

(f) BONUS: Es sei $\phi \in C^1(\overline{B}; \mathbb{R}^n)$ und $u \in W^{1,2}(B)$. Zeige: Dann gilt

$$\int_B \nabla u \cdot \phi dx = \int_{\partial B} tr(u)(x)(\phi(x) \cdot x)dS(x) - \int_B \operatorname{div}(\phi)u dx \tag{3}$$

(g) BONUS: Es sei nun $u \in W_0^{1,2}(B)^\perp$ d.h. für alle $\phi \in W_0^{1,2}(B)$ gilt

$$\int_B u\phi dx + \int_B \nabla u \nabla \phi dx = 0. \tag{4}$$

Sei nun $u \in W_0^{1,2}(B)^\perp$ sodass $tr(u) = 0$. Zeige , dass für $k \in \mathbb{N}$ stets gilt, dass $\eta_k(x) := (1 - |x|^2)\max(-k, \min(u,k)) \in W_0^{1,2}(B)$ und folgere damit, dass $u \equiv 0$ fast überall auf B.

(h) BONUS: Verwende, dass $W^{1,2}(B)$ ein Hilbertraum ist um zu zeigen, dass $ker(tr) = W_0^{1,2}(B)$

13. (Invarianzen des Dirichletfunktionals)

(a) Es sei $a \in \mathbb{C}$ mit $|a| < 1$ und $\psi \in \mathbb{R}$. Definiere

$$\phi_{a,\psi} : B_1(0) \to B_1(0) \quad \phi_{a,\psi}(z) = e^{i\psi}\frac{z-a}{1-\overline{a}z} \tag{5}$$

Zeige, dass ϕ_a auf $B_1(0)$ bijektiv und holomorph ist und eine holomorphe Umkehrabbildung hat.

(b) Es sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph. Definiere $g(x,y) := (\mathrm{Re}(f(x+iy)), \mathrm{Im}(f(x+iy)))$ für $(x,y) \in \widetilde{U} := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x+iy \in U\}$. Zeige:

$$\det Dg(x,y) = \left| \frac{df}{dz}(x+iy) \right|^2 \tag{6}$$

Hinweis: Cauchy- Riemann Differntialgleichungen.

Wir haben bereits in der Vorlesung darüber gesprochen, dass es bei Funktionalen, die invariant unter Reparametrisierung sind, schwierig ist, Kompaktheit von Niveaumengen zu bekommen. Aber auch ander Invarianzen können ein Problem sein: Im Folgenden sei für $B := B_1(0) \subset \mathbb{R}^2$ und $F \in W^{1,2}(B; \mathbb{R}^m)$. Wir definieren das Dirichlet-Funktional durch

$$D(F) := \int_B \left(|\partial_{u^1} F|^2 + |\partial_{u^2} F|^2 \right) d(u^1, u^2) \tag{7}$$

(c) Setze $\widetilde{F}(v^1, v^2) = F(\phi(v^1, v^2))$, wobei

$$\phi(v^1, v^2) = (\mathrm{Re}(\phi_{a,\psi})(v^1 + iv^2), \mathrm{Im}(\phi_{a,\psi}(v^1 + iv^2))) \tag{8}$$

Beweise, dass

$$D(\widetilde{F}) = D(F) \tag{9}$$

(d) Wir wollen zeigen, dass jede Abbildung $\phi : B_1(0) \to B_1(0)$, die bijektiv ist holomorph ist und eine holomorphe Umkehrabbildung hat, gegeben ist durch ein $\phi_{a,\psi}$. Eine solche Abbildung nennen wir übrigens **Automorphismus** der Einheitskreisscheibe.

(i) Zeige: Falls $f : B_1(0) \to B_1(0)$ holomorph mit $f(0) = 0$. Dann ist $|f(z)| \leq |z|$. Falls irgendwo in $B_1(0) \setminus \{0\}$ Gleichheit gilt, so gibt es ein $\psi \in \mathbb{R}$ sodass $f(z) = e^{i\psi} z$. Wende hierzu das Maximumsprinzip auf $g(z) := \frac{f(z)}{z}$ an.

(ii) Zeige: Für $a \in \mathbb{C}$ mit $|a| < 1$ gilt $|1 - \overline{a}w| \geq |w - a|$ für alle $w \in B_1(0)$.

(iii) Es sei $f : B_1(0) \to B_1(0)$ holomorph und bijektiv mit holomorpher Umkehrabbildung. Sei $f(0) = a$. Definiere $h(z) := \frac{f(z)-a}{1-\overline{a}f(z)}$. Zeige, dass $h : B_1(0) \to B_1(0)$ holomorph und bijektiv ist und eine holomorphe Umkehrabbildung hat. Außerdem erfüllt gilt, dass $h(0) = 0$ und damit $h^{-1}(0) = 0$. Verwende (i) um zu zeigen, dass $|h(z)| = |z|$ und folgere, dass es $\widetilde{a}, \widetilde{\psi}$ gibt so, dass $f = \phi_{\widetilde{a},\widetilde{\psi}}$

Das folgende Resultat wird wahrscheinlich später in der Vorlesung benötigt:

(e) Es seien $0 \leq \phi_1 < \phi_2 < \phi_3 < 2\pi$ und $0 \leq \psi_1 < \psi_2 < \psi_3 < 2\pi$. Zeige, dass genau ein Automorphismus der Einheitskreisscheibe h existiert, sodass $h(e^{i\phi_1}) = e^{i\psi_1}, h(e^{i\phi_2}) = e^{i\psi_2}, h(e^{i\phi_3}) = e^{i\psi_3}$

BONUS (auch nicht schwer): Das Resultat von oben lässt sich besser verstehen, wenn man die oben konstruierten Automorphismen als Möbiustransformationen auffasst

(f) BONUS: Eine Abbildung $M : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ heißt **Möbiustransformation** falls es $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ gibt mit $ad - bc \neq 0$ und so, dass entweder $c \neq 0$ und

$$M(z) = \begin{cases} \frac{az+b}{cz+d} & z \notin \{-\frac{d}{c}, \infty\} \\ \infty & z = \frac{-d}{c} \\ \frac{a}{c} & z = \infty \end{cases} \tag{10}$$

gilt, oder $c = 0$ und

$$M(z) = \begin{cases} \frac{az+b}{d} & z \neq \infty \\ \infty & z = \infty \end{cases} \tag{11}$$

gilt. Zeige, dass man mit $c \in \{0, 1\}$ bereits alle Möbiustransformationen erhalten kann, d.h für alle $(a, b, c, d) \in \mathbb{C}^4$ existiert $(\widetilde{a}, \widetilde{b}, \widetilde{d}) \in \mathbb{C}^3$ und $\widetilde{c} \in \{0, 1\}$ so, dass die zu (a, b, c, d) assoziierte Möbiustransformation mit der zu $(\widetilde{a}, \widetilde{b}, \widetilde{c}, \widetilde{d})$ assoziierten Möbiustransformation übereinstimmt.

(g) BONUS: Zeige, dass es zu jedem Tripel von Punkten $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ genau eine Möbiustransformation M gibt mit der Eigenschaft, dass $M(0) = z_1$, $M(1) = z_2$,$M(\infty) = z_3$.

(h) BONUS: Schließe aus der vorigen Teilaufgabe, dass es für je $(w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{C}^3$ und $(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3$ genau eine Möbiustransformation M gibt so, dass $M(w_1) = z_1$, $M(w_2) = z_2$, $M(w_3) = z_3$.

14. (Die Mittlere Krümmung und die Euler-Lagrange-Gleichung für das Flächenfunktional)

In dieser Aufgabe wollen wir den Begriff der mittleren Krümmung verstehen und die Euler-Lagrange-Gleichung für das Oberflächenfunktional, welches die mittlere Krümmung involviert, herleiten. Aufgaben (a) bis (f) sollen eine Hilfe beim Nacharbeiten der Definitionen der Vorlesung sein. Aufgaben (g) bis (i) sollen dabei helfen, einen Beweis von Satz 5.19 zu geben.

(a) Vergewissere dich zunächst, dass du folgendes über Matrizenkalkül weißt (alle lassen sich mit nur wenig linearer Algebra zeigen): Es seien $A \in \mathbb{R}^{m_1 \times n_1}$,$B \in \mathbb{R}^{m_2 \times n_2}$ Matrizen. Dann gilt:

1. Ist $n_1 = m_2$ und $m_1 = n_2$ so gilt $Spur(AB) = Spur(BA)$
2. Ist $n_1 = m_1$ so ist die Spur von A die Summe aller Eigenwerte von A mit algebraischer Vielfachheit summiert.
3. Gilt $n_1 = m_1 = n_2 = m_2$ und sind A und B symmetrisch und positiv semidefinit, so ist $Spur(AB) \geq 0$

(b) Lies dir noch einmal die Bemerkung nach Definition 5.17 durch, insbesondere die Definition der $h_{i,j}$. Verwende diese um Lemma 5.14 zu beweisen.

(c) Es sei $f \in C^\infty(\overline{B}, \mathbb{R})$. Es sei $S = \{(u, v, f(u, v))|u, v \in B\}$. Zeige, dass es sich bei S um eine reguläre orientierbare Fläche handelt und $(B, F, \mathbb{R}^3)$ mit $F(u, v) = (u, v, f(u, v))^T$ eine Parametrisierung ist. Berechne bezüglich dieser Parametrisierung die Koordinaten der ersten und zweiten Fundamentalform und gebe für jeden Punkt $p \in S$ die mittlere Krümmung H an.

(d) Seien S, f wie in Teilaufgabe (c). Zeige $H = \pm\frac{1}{2}\text{div}\left(\frac{\nabla f}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}}\right)$. Vergleiche mit der Minimalflächengleichung aus Satz 4.5.

Bemerkung: Zu $\pm$: Die Krümmung ist nur bis auf ein Vorzeichen eindeutig bestimmt, da man zwei Einheitsnormalenfelder wählen kann, die sich um ein Vorzeichen unterscheiden.

(e) Zeige: Ist die Hesse-Matrix von f positiv semidefinit, so gilt $H \geq 0$, ist die negativ definit, so gilt $H \leq 0$.

Bemerkung: Natürlich hängt auch das wieder von der Wahl des Vorzeichens ab.

(f) Berechne die mittlere Krümmung der Sphäre $\mathbb{S}^2$.

(g) Es sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche mit endlichem Flächeninhalt und es sei $\Phi : S \to \mathbb{R}^3$ ein glattes Normalenfeld so, dass es seine lokale Parametrisierung (U, F, V) gibt derart, dass es $K \subset V$ kompakt gibt mit $\phi(x) = 0$ für alle $x \in S \setminus K$. Zeige, dass es ein $\delta > 0$ gibt, sodass für $|t| < \delta$ die Menge $S_t := \{p + t\Phi(p)|p \in S\}$ eine reguläre Fläche ist und

$$\frac{d}{dt}A(S_t)_{|t=0} = \int_S \langle \Phi, \mathcal{H} \rangle \, dA \tag{12}$$

Hinweis: Definiere zunächst für $u \in U$: $F_t(u) := F(u) + t\Phi((F(u)))$. Zeige dann, dass $\Phi \circ F \in C_0^\infty(U)$ und probiere einzusehen, dass für t klein genug $rank DF_t(u) = 2 \quad \forall u \in U$. Dazu kann man zum Beispiel verwenden, dass $rank(A) = 2$ für $A \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ äquivalent dazu ist dass $A^T A$ invertierbar ist. Man vergewissere sich dann, dass die Menge aller invertierbaren Matrizen in der Standardtopologie von $\mathbb{R}^{2\times 2}$ offen ist.

(h) Es sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche und es sei $\Phi : S \to \mathbb{R}^3$ ein glattes Normalenfeld, sodass es $K \subset S$ kompakt gibt mit $\phi(x) = 0$ für alle $x \in S \setminus K$. Zeige, dass es ein $\delta > 0$ gibt, sodass für $|t| < \delta$ die Menge $S_t := \{p + t\Phi(p)|p \in S\}$ eine reguläre Fläche ist und

$$\frac{d}{dt}A(S_t)_{|t=0} = \int_S \langle \Phi, \mathcal{H} \rangle \, dA \tag{13}$$

(i) Man könnte meinen, dass wir wertvolle Informationen verlieren dadurch, dass wir nur Variationen entlang der Normalen betrachten. Hier wollen Wir zeigen, dass dem nicht so ist. Angenommen S wird durch eine Parametrisierung (U, F, V) bereits überdeckt. Nehmen wir weiterhin an, dass diese Parametrisierung konform ist. Sei $\phi \in C_0^\infty(U)$. Man verwende ohne rigorosen Beweis, dass es $\delta > 0$ gibt so, dass für $|t| < \delta$ und $j = 1, 2$ die Menge $S_t^j := \{p + t\phi(F^{-1}(p))\partial_{u^j} F(F^{-1}(p))|p \in S\}$ eine reguläre Fläche mit Parametrisierung $F_t : U \to S_t$ gegeben durch $F_t(u, v) = F(u, v) + t\phi(u, v)\partial_{u_j} F(u, v)$. Man zeige:

$$\frac{d}{dt}A(S_t^j)_{|t=0} = 0 \tag{14}$$

für beliebige $\phi \in C_0^\infty(U)$. **Anmerkung:** Das ist kein Zufall, sondern Teil eines nützlichen Prinzips. (Genaueres zum Beispiel in Lemma 12.1, The Calculus of Variations in the Large, Band 18, M. Morse)