

Aufgabe 15

$$(a) D_1(\mathbb{R}^n) := \{ f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n) \mid \forall f \in L^2(\mathbb{R}^n) \quad \forall \alpha > 0 \quad \lambda(\{x \in \mathbb{R}^n \mid |f(x)| > \alpha\}) < \infty \}$$

$$\mathbb{Z} \quad W^{1,2}(\mathbb{R}^n) \subset D^1(\mathbb{R}^n)$$

$$\text{Sei } f \in W^{1,2}(\mathbb{R}^n)$$

$$\nabla f \in L^2(\mathbb{R}^n) \quad \checkmark$$

$$\text{Sei } \alpha > 0$$

$$\lambda(\{x \in \mathbb{R}^n \mid |f(x)| > \alpha\})$$

$$= \lambda(\{x \in \mathbb{R}^n \mid |f(x)|^2 > \alpha^2\})$$

$$\stackrel{\text{Chebyshev}}{\leq} \frac{1}{\alpha^2} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 dx < \infty$$

$$\mathbb{Z} \quad D^1(\mathbb{R}^n) \not\subset W^{1,2}(\mathbb{R}^n)$$

$$\text{Setze } f(x) := \frac{1}{(1+|x|)^{\frac{n}{2} + \frac{n+1}{2}}}$$

$$f \notin L^2 \text{ denn } \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{1}{(1+|x|)^{\frac{n}{2} + \frac{n+1}{2}}} \right)^2 dx = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+|x|)^{n+1}} dx = \int_0^\infty \int_{\partial B_r(0)} \frac{1}{(1+r)^{n+1}} dS dr$$

$$= \int_0^\infty \frac{\alpha_n r^{n-1}}{(1+r)^{n+1}} dr = \infty$$

Wobei α_n - Volumen der n -dimensionalen

Einheitskugel

$$\text{Aber } f \in D^1 \text{ denn } \lambda(\{x \in \mathbb{R}^n \mid |f(x)| > \alpha\}) < \infty$$

$$= \lambda(\{x \in \mathbb{R}^n \mid \frac{1}{(1+|x|)^{\frac{n}{2} + \frac{n+1}{2}}} > \alpha\}) = \lambda(B_{\alpha^{-\frac{2}{n+1}}}(0)) < \infty$$

(b)

Sei $p \in (1, \infty)$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_0^{|f(x)|} p t^{p-1} dt \right) dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^\infty \chi_{\{(t, x) \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leq t \leq |f(x)|\}} p t^{p-1} dt dx$$

$$\stackrel{\text{Tonelli}}{=} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{\{(t, x) \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leq t \leq |f(x)|\}} p t^{p-1} dx dt$$

$$= \int_0^\infty \lambda(\{x \in \mathbb{R}^n \mid |f(x)| \geq t\}) p t^{p-1} dt$$

$$\leq \int_0^\infty p t^{p-1} e^{-t} dt < \infty \quad \forall p \in (1, \infty)$$

denn

$$\forall p \in (1, \infty) \exists K > 0 : t^{p-1} < e^{t/2} \quad \forall t : t > K$$

(c) Sei $f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ so dass $f \not\equiv 0$ f.ä.

Setze

$$f_k(x) := f(x + k)$$

Dann : $(f_k) \subset W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ und

$$\|f_k\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \quad \text{beschränkt}$$

Bew. hierzu

$$\begin{aligned} \|f_k\|_{W^{1,p}} &= \|\nabla f_k\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|f_k\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f(x+k)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x+k)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \|f\|_{W^{1,p}} \end{aligned}$$

Angenommen (f_k) hätte eine Teilfolge (f_{k_ℓ}) die in $L^p(\mathbb{R}^n)$ gegen ein $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ konvergiert.

Beh $g=0$. Wir wissen $\exists$ TF (f_{k_m}) die für gegen g konvergiert.

$$\begin{aligned} \int_{B_r(0)} |g(x)|^p dx &\leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \int_{B_r(0)} |f(x+k_m)|^p dx \\ &= \liminf_{m \rightarrow \infty} \int_{B_r(k_m)} |f(x)|^p dx \end{aligned}$$

$$= \liminf_{n \rightarrow \infty} \int \underbrace{\chi_{B_r(l_{k_n})}}_{\rightarrow 0} (x) |f(x)|^p dx$$

$1 \leq \|f(x)\|^p \in L^1$

Lebesgue 0.

$$\Rightarrow g \equiv 0 \quad \text{f.a.}$$

Then also

$$0 = \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \lim_{R \rightarrow \infty} \|f_k\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

$$\Rightarrow f \equiv 0 \quad \text{f.a.} \quad \text{✓}$$

(d) Angenommen

$\exists C > 0$ sodass

(*)

$$\|f\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C \|\nabla f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

$$\forall f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$$

Sei $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ beliebig $f \not\equiv 0$. (für $f=0$ ist (*) immer erfüllt)

Setze $f_\lambda(x) := f(\lambda x)$

für ein $\lambda > 0$

$$\|f\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$= \left(\lambda^n \int_{\mathbb{R}^n} |f(\lambda x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$= \lambda^{\frac{n}{q}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f_\lambda(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$= \lambda^{\frac{n}{q}} \|f_\lambda\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \stackrel{f_\lambda \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)}{\leq} C \lambda^{\frac{n}{q}} \|\nabla f_\lambda\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

$$\leq C \lambda^{\frac{n}{q}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f_\lambda(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= C \lambda^{\frac{n}{q}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\lambda \nabla f(\lambda x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= C \lambda^{\frac{n}{q}} \lambda \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f(\lambda x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= C \lambda^{\frac{n}{q}} \lambda \left(\frac{1}{\lambda^n} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= C \lambda^{1+\frac{n}{q}-\frac{n}{2}} \| \nabla f \|_{L^2} \Rightarrow \| f \|_{L^q} \leq C \lambda^{1+\frac{n}{q}-\frac{n}{2}} \| \nabla f \|_{L^2}$$

Angenommen $1+\frac{n}{q}-\frac{n}{2} \neq 0$

Dann $\lambda \rightarrow \infty$ oder $\lambda \rightarrow 0$ impliziert

dass $\| f \|_{L^q} = 0 \Rightarrow f = 0$ ∇

$$\Rightarrow 1+\frac{n}{q}-\frac{n}{2} = 0 \Leftrightarrow 1-\frac{n}{2} = -\frac{n}{q}$$

$$\Leftrightarrow q = \frac{2n}{n-2}$$

Zu $W^{1,2}(\mathbb{R}^n) = W_0^{1,2}(\mathbb{R}^n)$

Sei $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ $0 \leq \eta \leq 1$, $\eta \equiv 1$ auf $B_1(0)$

Nun setze $\eta_\varepsilon(x) := \eta(\varepsilon x)$

Sei φ_ε der Standard-Mollifier

Dann $f \eta_\varepsilon * \varphi_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$

Regularisieren
& Abschneiden

$$\| f \eta_\varepsilon * \varphi_\varepsilon - f \|_{W^{1,2}} \leq \| f \eta_\varepsilon * \varphi_\varepsilon - f * \varphi_\varepsilon \|_{W^{1,2}}$$

$$+ \| f * \varphi_\varepsilon - f \|_{W^{1,2}} \leq \| f \eta_\varepsilon - f \|_{W^{1,2}} + \| f * \varphi_\varepsilon - f \|_{W^{1,2}}$$

Nun

$$\|f \circ \varphi_\varepsilon - f\| \rightarrow 0 \quad (\varepsilon \rightarrow 0)$$

$$\begin{aligned} \|f \circ \varphi_\varepsilon - f\|_{W^{1,2}} &= \| \nabla (f \circ \varphi_\varepsilon) - \nabla f \|_{L^2} + \|f \circ \varphi_\varepsilon - f\|_{L^2} \\ &\leq \| \nabla f (\varphi_\varepsilon - 1) + f \nabla \varphi_\varepsilon \|_{L^2} + \|f \circ \varphi_\varepsilon - f\|_{L^2} \\ &\leq \| \nabla f (\varphi_\varepsilon - 1) \|_{L^2} + \|f \nabla \varphi_\varepsilon\|_{L^2} + \|f \circ \varphi_\varepsilon - f\|_{L^2} \end{aligned}$$

Nun

$$\begin{aligned} \|f \circ \varphi_\varepsilon - f\|_{L^2} &= \sqrt{\int_{\mathbb{R}^n} |f|^2 (\varphi_\varepsilon - 1)^2} \rightarrow 0 \\ &\quad \begin{array}{l} \varphi_\varepsilon - 1 \rightarrow 0 \\ \text{p.k.w., da} \\ \varphi_\varepsilon \equiv 1 \text{ auf } B_{\frac{1}{\varepsilon}}(0). \end{array} \quad \text{(bekannt)} \\ &\leq |f|^2 \cdot 2t \end{aligned}$$

Analoge

$$\| \nabla f (\varphi_\varepsilon - 1) \|_{L^2} \rightarrow 0 \quad (\varepsilon \rightarrow 0)$$

$$\begin{aligned} \|f \nabla \varphi_\varepsilon\|_{L^2}^2 &= \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 |\nabla \varphi_\varepsilon(x)|^2 \\ &= \varepsilon^2 \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 |\nabla \varphi(\varepsilon x)|^2 \end{aligned}$$

Nun $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \exists C > 0 :$

$$\|\nabla \eta\|_\infty \leq C$$

$$\Rightarrow \|\eta \nabla \eta\|_{L^2}^2 \leq C \varepsilon^2 \int |f(x)|^2 \longrightarrow 0$$

($\varepsilon \rightarrow 0$)

Sei nun $q = \frac{2n}{n-2}$

Wir wissen $\exists C > 0$

$$\|f\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C \|\nabla f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \quad \forall f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$$

Nun sei $f \in W^{1,2}(\mathbb{R}^n)$

$$W^{1,2}(\mathbb{R}^n) = W_0^{1,2}(\mathbb{R}^n)$$

$$\Rightarrow \exists (f_n) \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$$

$f_n \rightarrow f$ in $W^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ und p.k.w.
für

$$\Rightarrow \left(\int |f|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \left(\int |f_n|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} C \|\nabla f_n\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = C \|\nabla f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

Aufgabe 16

a) Angenommen $\psi_k \rightarrow \psi$ in $W^{1,2}(\mathbb{R}^n)$

$$\Rightarrow \forall x' \in (W^{1,2}(\mathbb{R}^n))^* : x'(\psi_k) \rightarrow x'(\psi)$$

Sei nun $A \subset \mathbb{R}^n$ offen und $x' \in (W^{1,2}(A))^*$

Definiere $\tilde{x}' \in (W^{1,2}(\mathbb{R}^n))^*$,

$$\tilde{x}'(\psi) := x'(\psi|_A)$$

$$\sum \tilde{x}' \in W^{1,2}(\mathbb{R}^n)^*$$

(linear $\checkmark$)

$$\|\tilde{x}'(\psi)\| = |x'(\psi|_A)| \leq \|x'\|_{(W^{1,2}(A))^*} \|\psi|_A\|_{W^{1,2}(A)}$$

$$\leq \|x'\|_{(W^{1,2}(A))^*} \|\psi\|_{W^{1,2}(\mathbb{R}^n)},$$

Nun $\tilde{x}'(\psi_k) \rightarrow \tilde{x}'(\psi)$ und d.h.

$$x'(\psi_k|_A) \rightarrow x'(\psi|_A)$$

$$\Rightarrow \psi_k|_A \rightarrow \psi|_A$$

(b) Sei $\varepsilon > 0$

$\Rightarrow \exists r > 0$:

$$\left(\int_{A_r} |v(x)|^{\frac{n}{2}} dx \right)^{\frac{2}{n}} < \varepsilon$$

Wobei: $A_r = B_r(0)^c \cup \{x \in \mathbb{R}^n \mid |v(x)| > r\}$

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\mathbb{R}^n} v(x) |\varphi_j(x)|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^n} v(x) |\varphi(x)|^2 dx \right| \\ & \leq \left| \int_{A_r^c} v(x) |\varphi_j(x)|^2 dx - \int_{A_r^c} v(x) |\varphi(x)|^2 dx \right| \\ & \quad + \int_{A_r} |v(x)| |\varphi_j(x)|^2 + \int_{A_r} |v(x)| |\varphi(x)|^2 \end{aligned}$$

Nun $\varphi_j \rightarrow \varphi$ in $W^{1,2}(B_r(0))$

$\xRightarrow{\text{Rellich}}$
 $\varphi_j \rightarrow \varphi$ in $L^2(B_r(0))$

$\xRightarrow{\text{Kontinuität}}$
 $\varphi_j \rightarrow \varphi$ in $L^2(A_r^c)$
da $A_r^c \subset B_r(0)$

Nun $v \in L^\infty(A_r^c)$

Nun gilt, da $v \in L^\infty(A_r^c)$

$$\lim_{J \rightarrow \infty} \left| \int_{A_r^c} v(x) (|\psi_J(x)|^2 - |\psi(x)|^2) dx \right| = 0$$

Bew

$$\left| \int_{A_r^c} v(x) (|\psi_J(x)|^2 - |\psi(x)|^2) dx \right|$$

$$\leq \int_{A_r^c} |v(x)| \left| |\psi_J(x)|^2 - |\psi(x)|^2 \right| dx$$

$$\leq r \int_{A_r^c} \left| |\psi_J(x)|^2 - |\psi(x)|^2 \right| dx =: \xi_J$$

Nun Beh:

$$\xi_J \rightarrow 0$$

Äquivalent (nach Haarspalter Lemma)

Jede Teilfolge ξ_{J_k} hat eine Teilfolge, die gegen 0 konvergiert.

Bew

Sei (ξ_{J_k}) eine TF.

Dann $\exists (j_{k_\ell})$ TF von (j_k) sodass

$\psi_{j_{k_\ell}} \rightarrow \psi$ in $L^2(A_r^c)$ und p.w. für

Dann:

$$| |\varphi_{j_{k_\ell}}(x)|^2 - |\varphi(x)|^2 | \longrightarrow 0 \text{ p.k.w. und}$$

ist Majorisiert durch

$$|\varphi_{j_{k_\ell}}(x)|^2 + |\varphi(x)|^2, \text{ eine Folge von}$$

der Mann Grenzwert & Integral vertauschen

$$\text{darf} \xrightarrow[\text{von Lebesgue}]{\text{Majoranten}} \{j_{k_\ell}\} \longrightarrow 0$$

Hauptsatz Lemma

$$\xRightarrow{\quad} \{j\} \longrightarrow 0$$

Nun

$$\int_{A_r} |v(x)| |\psi_j(x)|^2 \leq \|v\|_{L^{n/2}(A_r)} \|\psi_j\|_{L^{\frac{2n}{n-2}}(A_r)}^2$$

$\hookrightarrow$ Hölder mit $\frac{n}{2}, \frac{n}{n-2}$

$$\leq \|v\|_{L^{n/2}(A_r)} S_n \|\nabla \psi_j\|_{L^2(A_r)}$$

$$\leq \varepsilon S_n \|\nabla \psi_j\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

Nun, da schwach konv. Folgen beschränkt sind:

$$\sup_{j \in \mathbb{N}} \|\nabla \psi_j\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} < \infty.$$

Analog

$$\int_{A_r} |v(x)| |\varphi(x)|^2 \leq \varepsilon S_n \|\nabla \varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \limsup_{j \rightarrow \infty} \left| \int_{\mathbb{R}^n} v(x) |\varphi_j(x)|^2 - v(x) |\varphi(x)|^2 \right| \\ \leq \varepsilon S_n \left(\|\nabla \varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \sup_{j \in \mathbb{N}} \|\nabla \varphi_j\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \right) \end{aligned}$$

$$\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} 0.$$

$\Rightarrow$ Behauptung

16c)

$$\forall \alpha > 0 \exists r_\alpha > 0 : \{x \in \mathbb{R}^n \mid |w(x)| > \alpha\} \subset B_{r_\alpha}(0)$$

$$\limsup_{j \rightarrow \infty} \left| \left(\int_{\mathbb{R}^n} w(x) |\varphi_j(x)|^2 - w(x) |\varphi(x)|^2 dx \right) \right|$$

$$\leq \limsup_{j \rightarrow \infty} \left| \int_{B_{r_\alpha}(0)} w(x) (|\varphi_j(x)|^2 - |\varphi(x)|^2) dx \right|$$

$$+ \limsup_{j \rightarrow \infty} \left| \int_{B_{r_\alpha}(0)^c} w(x) |\varphi_j(x)|^2 dx \right| +$$

$$\limsup_{j \rightarrow \infty} \left| \int_{B_{r_\alpha}(0)^c} w(x) |\varphi(x)|^2 dx \right|$$

$$\leq \|w\|_\infty \limsup_{j \rightarrow \infty} \int_{B_{r_\alpha}(0)} |(|\varphi_j(x)|^2 - |\varphi(x)|^2)| dx$$

$$+ \alpha \sup_{j \in \mathbb{N}} (\|\varphi_j\|_{L^2} + \|\varphi\|_{L^2})$$

Rellich Kondrachev $\|\varphi_j\|_{L^2(B_{r_\alpha}(0))} \rightarrow \|\varphi\|_{L^2(B_{r_\alpha}(0))}$

da $\varphi_j \rightarrow \varphi$ in $W^{1,2}(B_{r_\alpha}(0))$

$$\Rightarrow \varphi_j \rightarrow \varphi \text{ in } L^2(B_R(0))$$

Nun

Mit der gleichen Diskussion wie in (b)

$$\int_{B_R(0)} | |\varphi_j(x)|^2 - |\varphi(x)|^2 | dx \rightarrow 0 \quad (j \rightarrow \infty)$$

und daher

$$\limsup_{j \rightarrow \infty} \left| \int_{\mathbb{R}^n} w(x) |\varphi_j(x)|^2 - w(x) |\varphi(x)|^2 dx \right|$$

$$\leq \|w\|_\infty \cdot 0 + 4 \sup_{j \in \mathbb{N}} (\|\varphi_j\|_{L^2} + \|\varphi\|_{L^2})$$

$$\xrightarrow{\alpha \rightarrow 0} 0$$

[6d]

$$\text{Sei } A_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |w(x)| > \alpha\}$$

$$\limsup_{j \rightarrow \infty} \left| \int_{\mathbb{R}^n} w(x) |\varphi_j(x)|^2 - \int_{\mathbb{R}^n} w(x) |\varphi(x)|^2 \right|$$

$$\leq \limsup_{j \rightarrow \infty} \left| \int_{A_\alpha} w(x) |\varphi_j(x)|^2 - \int_{A_\alpha} w(x) |\varphi(x)|^2 \right|$$

$$+ \limsup_{j \rightarrow \infty} \int_{A_\alpha^c} |w(x)| |\varphi_j(x)|^2 + \int_{A_\alpha^c} |w(x)| |\varphi(x)|^2$$

da $\varphi_j \rightarrow \varphi$ in $L^2(A_\alpha)$ wegen A15 e

$$\leq 0 + \alpha \sup_{j \in \mathbb{N}} \left(\|\varphi_j\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \right)$$

$$\xrightarrow{\alpha \rightarrow 0} 0$$

(e) Es sei $\varphi_j \rightarrow \varphi$ in $W^{1,2}(\mathbb{R}^n)$

Sei $V \in L^{\frac{n}{2}} + L^\infty$ sodass $\forall \alpha > 0$

$|\{x \in \mathbb{R}^n \mid |V(x)| > \alpha\}| < \infty$. Dann

$$\sum \int_{\mathbb{R}^n} V(x) |\varphi_j(x)|^2 \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^n} V(x) |\varphi(x)|^2$$

Beweis Schreibe $V(x) = v(x) + w(x)$, $v \in L^{\frac{n}{2}}$, $w \in L^\infty$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} V(x) |\varphi_j(x)|^2 = \int_{\mathbb{R}^n} v(x) |\varphi_j(x)|^2 \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^n} v(x) |\varphi(x)|^2 \text{ nach (a)}$$

$$+ \int_{\mathbb{R}^n} w(x) |\varphi_j(x)|^2$$

$$\longrightarrow \int_{\mathbb{R}^n} w(x) |\varphi(x)|^2$$

sofern wir zeigen können,
dass

$$\forall \alpha > 0 \quad |\{x \in \mathbb{R}^n \mid |w(x)| > \alpha\}| < \infty$$

Sei $\alpha > 0$

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid |w(x)| > \alpha\}$$

$$= \cancel{\{x \in \mathbb{R}^n \mid |w(x)| > \alpha\}} \cup$$

$$= \{x \in \mathbb{R}^n \mid |w(x)| > \alpha\} \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid |v(x)| > \frac{\alpha}{2}\}$$

$$\cup \{x \in \mathbb{R}^n \mid |w(x)| > \alpha\} \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid |v(x)| \leq \frac{\alpha}{2}\}$$

Nun

$$|\{x \in \mathbb{R}^n \mid |w(x)| > \alpha\} \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid |v(x)| > \frac{\alpha}{2}\}|$$

$$\leq |\{x \in \mathbb{R}^n \mid |v(x)| > \frac{\alpha}{2}\}| < \infty$$

$$|\{x \in \mathbb{R}^n \mid |w(x)| > \alpha\} \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid |v(x)| \leq \frac{\alpha}{2}\}|$$

$$\stackrel{V=v+w}{\leq} |\{x \in \mathbb{R}^n \mid |v(x)| > \frac{\alpha}{2}\}| \leq \left(\frac{2}{\alpha}\right)^{n/2} \int_{\mathbb{R}^n} |v(x)|^{n/2} dx < \infty$$

$$|v| \geq |w| - |v|$$

$$\geq \frac{\alpha}{2}$$

$\Rightarrow$ Beh.

Aufgabe 17

$$1 a) \quad \mathcal{E}(\psi) = \int_{\mathbb{R}^n} |D\psi|^2 dx$$

Es sei $\psi \in W^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ derart dass

$$\|\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 1$$

Definiere für $R > 0$

$$\psi_R(x) = \frac{1}{R^{n/2}} \psi\left(\frac{x}{R}\right)$$

$$\|\psi_R\|_{L^2}^2 = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{R^n} \left| \psi\left(\frac{x}{R}\right) \right|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^n} |\psi(x)|^2 dx = 1$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\psi_R) &= \int_{\mathbb{R}^n} |D\psi_R(x)|^2 dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{R^{n+1}} |D\psi\left(\frac{x}{R}\right)|^2 dx = \frac{1}{R} \int_{\mathbb{R}^n} |D\psi(x)|^2 dx \end{aligned}$$

$$\longrightarrow 0 \quad (R \rightarrow \infty)$$

Da nun $\mathcal{E}(\psi) \geq 0 \quad \forall \psi$ folgt

$$\inf_{\psi \in W^{1,2}(\mathbb{R}^n)} \mathcal{E}(\psi) = 0$$

(b)

$$\mathcal{E}(\psi) = \int_{\mathbb{R}^n} |D\psi|^2 + V(x) |\psi(x)|^2 dx$$

$$\mathcal{M}_0^\perp = \left\{ \psi \in W^{1,2}(\mathbb{R}^n) \mid \|\psi\|_{L^2} = 1, \langle \psi, \psi_0 \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 0 \right\}$$

Sei $(\psi_n) \subset \mathcal{M}_0^\perp$ sodass

$$\mathcal{E}(\psi_n) \downarrow \inf_{\psi \in \mathcal{M}_0^\perp} \mathcal{E}(\psi) < 0$$

Prop 6.2 $\exists \lambda > 0$:

$$\Rightarrow \mathcal{E}(\psi_n) \geq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} |D\psi_n|^2 - \lambda - \|\psi\|_{L^\infty}$$

Da $\mathcal{E}(\psi_n)$ beschränkt folgt

$$\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} |D\psi_n|^2 \text{ beschränkt}$$

$$\Rightarrow \exists \psi_{k_n} : \psi_{k_n} \rightharpoonup \psi \text{ in } W^{1,2}(\mathbb{R}^n)$$

$$\text{Lemma 6.3} \Rightarrow \int V(x) |\psi_{k_n}(x)|^2 \rightarrow \int V(x) |\psi(x)|^2 \quad (*)$$

Nun

$$0 \leq \int |D\psi_{k_n}(x) - D\psi(x)|^2 = \int |D\psi_{k_n}(x)|^2 + |D\psi(x)|^2 - 2(D\psi_{k_n}(x), D\psi(x))$$

$$\Rightarrow 0 \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int |D\psi_{k_n}(x)|^2 - \int |D\psi(x)|^2 \quad (**)$$

b) $\mathcal{Q}^{**} \Rightarrow$

$$\mathcal{E}(\psi) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathcal{E}(\psi_{k_n}) = \inf_{\tilde{\psi} \in \mathcal{M}_0^1} \mathcal{E}(\tilde{\psi}) = E_1$$

Nun

$\psi \in \mathcal{M}_0^1$ da

$$\int \psi \psi_0 \, dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int \psi_{k_n} \psi_0 \, dx = 0$$

$\|\psi\|_{L^2} = 1$ denn ~~angenommen~~

$$\|\psi\|_{L^2} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|\psi_{k_n}\|_{L^2} = 1$$

Falls $0 < \|\psi\|_{L^2} < 1$ so gilt

$$\tilde{\psi} = \frac{\psi}{\|\psi\|_{L^2}} \in \mathcal{M}_0^1 \text{ und}$$

$$\mathcal{E}(\tilde{\psi}) = \frac{1}{\|\psi\|_{L^2}^2} \mathcal{E}(\psi) \leq \frac{E_1}{\|\psi\|_{L^2}^2} \stackrel{E_1 < 0}{<} E_1 \quad \Downarrow$$

Falls $\|\psi\|_{L^2} = 0$ so folgt

$$0 = \mathcal{E}(\psi) \leq \inf_{\tilde{\psi} \in \mathcal{M}_0^1} \mathcal{E}(\tilde{\psi}) = E_1 < 0 \quad \Downarrow$$

$$\Rightarrow \|\psi\|_{L^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \psi \in \mathcal{M}_0^1$$

und insbesondere

$$\Sigma(\varphi) = \inf_{\tilde{\varphi} \in M_0^\perp} \Sigma(\tilde{\varphi})$$

(c) Falls ε klein genug muss gelten

$$\varphi_1 + \varepsilon \varphi \neq 0 \quad \text{und}$$

$$\frac{\varphi_1 + \varepsilon \varphi}{\|\varphi_1 + \varepsilon \varphi\|_{L^2}} \in M_0^\perp$$

$$\text{da } \int \frac{\varphi_1 + \varepsilon \varphi}{\|\varphi_1 + \varepsilon \varphi\|_{L^2}} \varphi_0 = \frac{1}{\|\varphi_1 + \varepsilon \varphi\|} \left(\underbrace{\int \varphi_1 \varphi_0}_{=0} + \varepsilon \underbrace{\int \varphi \varphi_0}_{=0} \right)$$

$$= 0$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \Sigma \left(\frac{\varphi_1 + \varepsilon \varphi}{\|\varphi_1 + \varepsilon \varphi\|} \right)$$

$$= \frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \frac{1}{\|\varphi_1 + \varepsilon \varphi\|^2} \int |\nabla(\varphi_1 + \varepsilon \varphi)|^2 + V(x) (\varphi_1 + \varepsilon \varphi)^2$$

$$= \frac{1}{\|\varphi_1\|^2} \left(2 \int \nabla \varphi_1 \nabla \varphi + V(x) (\varphi_1, \varphi) dx \right)$$

$$- \frac{2}{\|\varphi_1\|^3} \underbrace{\left(\int |\nabla \varphi_1|^2 + V(x) |\varphi_1|^2 \right)}_{= E_1} (\varphi_1, \varphi)_{L^2}$$

$$\stackrel{\|\varphi_1\|_{L^2}=1}{=} 2 \left(\int \nabla \varphi_1 \nabla \varphi + V(x) \varphi_1 \varphi - 2 E_1 \int \varphi_1 \varphi \right)$$

$\Rightarrow$ Beh.

d) Sei $\varphi \in W^{1,2}(\mathbb{R}^n)$.

$$\text{setze } \tilde{\varphi} = \varphi - (\varphi, \varphi_0) \varphi_0$$

$$\tilde{\varphi} \text{ erfüllt } (\tilde{\varphi}, \varphi_0) = 0 \quad \text{da } \|\varphi_0\|_{L^2} = 1$$

$$E_1 \int \varphi_1 \varphi = E_1 \int \varphi_1 (\varphi - (\varphi, \varphi_0) \varphi_0)$$

$$+ E_1 (\varphi, \varphi_0) \underbrace{\int \varphi_1 \varphi_0}_{=0}$$

$$= E_1 \int \varphi_1 (\varphi - (\varphi, \varphi_0) \varphi_0)$$

$$\underline{\underline{(c)}} \quad \int \nabla \psi_1 \cdot \nabla (\varphi - (\varphi, \psi_0) \psi_0) + \int V \psi_1 (\varphi - (\varphi, \psi_0) \psi_0)$$

$$= \int \nabla \psi_1 \cdot \nabla \varphi + \int V \psi_1 \varphi$$

$$- (\varphi, \psi_0) \left(\int \nabla \psi_1 \cdot \nabla \psi_0 + \int V \psi_1 \psi_0 \right)$$

$$\underline{\underline{=}} \quad \int \nabla \psi_1 \cdot \nabla \varphi + \int V \psi_1 \varphi - (\varphi, \psi_0) E_0 \underbrace{\int \psi_1 \psi_0}_{=0}$$

$\hookrightarrow \psi_0$ löst Schrödinger gl.
 Satz 6.4

$$= \int \nabla \psi_1 \cdot \nabla \varphi + \int V \psi_1 \varphi$$

(e) Es sei ψ_0 wie in Satz 6.4 d.h

$$\mathcal{E}(\psi_0) = E_0 \quad \text{und}$$

$$\int \nabla \psi_0 \nabla \varphi + \int V \psi_0 \varphi = E_0 \int \psi_0 \varphi$$

$$\forall \varphi \in W^{1,2}(\mathbb{R}^n)$$

$$\varphi := \frac{\psi_0^+}{\|\psi_0^+\|_{L^2}}$$

$$\Rightarrow \int \frac{\nabla \psi_0 \nabla \psi_0^+}{\|\psi_0^+\|_{L^2}} + \int V \frac{\psi_0 \psi_0^+}{\|\psi_0^+\|_{L^2}} = E_0 \int \frac{\psi_0 \psi_0^+}{\|\psi_0^+\|_{L^2}}$$

Nun

$$\psi_0 \psi_0^+ = (\psi_0^+)^2$$

$$\nabla \psi_0 \nabla \psi_0^+ = |\nabla \psi_0|^2 \chi_{\psi_0 > 0} = |\nabla \psi_0^+|^2$$

$$\frac{\int |\nabla \psi_0^+|^2}{\|\psi_0^+\|_{L^2}} + \int V \frac{(\psi_0^+)^2}{\|\psi_0^+\|_{L^2}} = E_0 \|\psi_0^+\|_{L^2}$$

$$\Rightarrow \int \left| \nabla \left(\frac{\psi_0^+}{\|\psi_0^+\|} \right) \right|^2 + \int V \left(\frac{\psi_0^+}{\|\psi_0^+\|} \right)^2 = E_0$$

$$\Rightarrow \sum \left(\frac{\psi_0^\dagger}{\|\psi_0^\dagger\|_{L^2}} \right) = E_0$$

(9) [Aufgabe 17g]

Erkenntnis 1

Gibt es eine nichtnegative Lösung von

$$-\Delta \psi - \frac{\psi}{|x|} = E \psi$$

so folgt $E = E_0$ und ψ ist (nach Normierung)

im Grundzustand denn sei ψ^* ~~der~~ ein
Grundzustand und $\psi^* \geq 0$

$$-\Delta \psi - \frac{\psi}{|x|} = E \psi$$

$$\Rightarrow \int \nabla \psi \nabla \psi^* - \int \frac{\psi \psi^*}{|x|} = E \int \psi \psi^*$$

||

$$E_0 \int \psi \psi^*$$

$$\Rightarrow 0 = (E - E_0) \int \psi \psi^*$$

$$\Rightarrow (\psi, \psi^*)_{L^2} = 0$$

oder $E = E_0$
(in dem Falle $\mathcal{E}(\psi) = E_0!$)

und damit können ψ und ψ' nicht beide positiv sein.

Also

Suche für irgend ein E
positive bzw nicht negative Lösungen

Von

$$-\Delta \psi - \frac{\psi}{|x|} = E \psi$$

Falls sich eine findet, so ist
dieses E sofort $= E_0$ und
 ψ ist ein Grundzustand

Idee: Polarkoordinaten

$$-\Delta \psi - \frac{\psi}{|x|} = E \psi$$

Suche nach radialen Lösungen $\psi(x) = \psi(r)$

Laplace in Polarkoordinaten

Für Radiale Funktionen gilt:

$$\begin{aligned} \text{Bew zu (x): } \psi(x) &= f(|x|) \\ \Rightarrow \Delta \psi(x) &= \operatorname{div} \nabla \psi(x) \\ &= \operatorname{div} \left(f'(|x|) \frac{x}{|x|} \right) \\ &= f'(|x|) \operatorname{div} \left(\frac{x}{|x|} \right) + f''(|x|) \left\langle \frac{x}{|x|}, \frac{x}{|x|} \right\rangle \\ &= f''(|x|) + f'(|x|) \frac{n-1}{|x|} \end{aligned}$$

$$\Delta \psi(x) = \psi''(r) + \frac{n-1}{r} \psi'(r) \quad (*)$$

(siehe Wikipedia)

$$\Rightarrow -\psi''(r) - \frac{n-1}{r} \psi'(r) - \frac{\psi(r)}{r} = E \psi(r)$$

$\Rightarrow$ Separationsansatz:

Separiere Terme abhängig von $\frac{1}{r}$ und Terme unabhängig von $\frac{1}{r}$

$$\begin{cases} -\psi''(r) = E \psi(r) & \text{(I)} \\ -\frac{n-1}{r} \psi'(r) - \frac{\psi(r)}{r} = 0 & \text{(II)} \end{cases}$$

$$\text{(II)} \Rightarrow \psi'(r) = -\frac{1}{n-1} \psi(r)$$

$$\Rightarrow \psi(r) = \exp\left(-\frac{r}{n-1}\right) C$$

$\Rightarrow$ ~~II~~

Nun in ~~II~~

$$E \psi(r) = -\psi''(r) = -\frac{1}{(n-1)^2} \exp\left(\frac{-r}{n-1}\right) C$$
$$= -\frac{1}{(n-1)^2} \psi(r)$$

$$\Rightarrow E = \frac{-1}{(n-1)^2} < 0$$

$\Rightarrow$ ~~II~~

Kontrolle Beh

$$\psi(x) = C \exp\left(\frac{-|x|}{n-1}\right)$$

ist eine positive Lösung der Schrödinger
Gleichung für ein $C > 0$

Bew.

(1) Best. C durch Normierung

$$I = \int \psi(x)^2 dx$$

$$= \int C^2 \exp\left(\frac{-2|x|}{n-1}\right) dx$$

$$= C^2 \int_0^\infty \int_{\partial B_1(0)} \exp\left(\frac{-2}{n-1} |x|\right) dS(x) dg$$

$$\underline{\underline{\alpha_n = n! n^{-1} (\partial B_1(0))}} C^2 \int_0^\infty \alpha_n \int^{n-1} \exp\left(\frac{-2}{n-1} g\right) dg$$

$$= C^2 \alpha_n \int_0^\infty \left(\frac{n-1}{2} g\right)^{n-1} \exp(-g) dg$$

$$= C^2 \alpha_n \left(\frac{n-1}{2}\right)^{n-1} \underbrace{\int_0^\infty g^{n-1} \exp(-g) dg}_{= \Gamma(n) = (n-1)!}$$

$$= C^2 \alpha_n \left(\frac{n-1}{2}\right)^{n-1} (n-1)!$$

$$\Rightarrow C = \frac{1}{\sqrt{\alpha_n (n-1)! \left(\frac{n-1}{2}\right)^{n-1}}}$$

Wobei $\alpha_n = n! (\partial B_1(0))$

$$-\Delta \psi = \frac{\psi}{|x|}$$

$$= -\operatorname{div} \left(\frac{x}{|x|} C e^{-\frac{|x|}{n-1}} \left(-\frac{1}{n-1} \right) \right) = C e^{-\frac{|x|}{n-1}} \frac{1}{|x|}$$

$$= + \frac{n-1}{|x|} C e^{-\frac{|x|}{n-1}} \frac{1}{n-1} - \frac{1}{(n-1)^2} C e^{-\frac{|x|}{n-1}}$$

$$- C e^{-\frac{|x|}{n-1}} \frac{1}{|x|} = -\frac{1}{(n-1)^2} C e^{-\frac{|x|}{n-1}}$$

$$= E \psi, \text{ Nun, da } \psi \text{ positiv.}$$

$$\Rightarrow E = -\frac{1}{(n-1)^2} = E_0 \quad \text{und}$$

$$\psi(x) = C e^{-\frac{|x|}{n-1}} = \frac{1}{\sqrt[n]{n(n-1)! \left(\frac{n-1}{2}\right)^{n-1}}} e^{-\frac{|x|}{n-1}}$$

$$\underline{\text{Nichtnegativ!}} \Rightarrow \text{Beh}$$