Universität Ulm

Abgabe: Donnerstag, 30.11.2017

Prof. Dr.Anna Dall'Acqua
Marius Müller
Wintersemester 2017/18
Punktzahl: keine

Übungen Variationsrechnung: Blatt 5

15. (Der Raum $D^1(\mathbb{R}^n)$, Sobolev-Einbettung und Rellich-Kondrachow-Resultate für unbeschränkte Gebiete)

(a) Definiere wie in der Vorlesung

$$D^1(\mathbb{R}^n) := \{f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n) |\ \nabla f \in L^2(\mathbb{R}^n)\ , \forall \alpha > 0 : \lambda(\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) > \alpha\}) < \infty\} \quad (1)$$

Zeige $W^{1,2}(\mathbb{R}^n) \subset D^1(\mathbb{R}^n)$ und finde eine Funktion in $D^1(\mathbb{R}^n) \setminus W^{1,2}(\mathbb{R}^n)$.

(b) BONUS: Es sei $f \in D^1(\mathbb{R}^n)$ sodass $\lambda(\{x \in \mathbb{R}^n | |f(x)| \geq t\}) \leq e^{-t}$. Zeige, dass $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ für alle $p \in (1, \infty)$

(c) Der Satz von Rellich Kondrachow (Satz 2.10) besagt, dass für $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und C^1-glatt berandet und $p \in [1, \infty)$ die Einbettung $\iota : W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\Omega)$ kompakt ist. Zeige, dass die Einbettung $\iota : W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n)$ nicht kompakt ist, d.h. finde eine beschränkte Folge in $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ die keine konvergente Teilfolge in $L^p(\mathbb{R}^n)$ hat.

Hinweis: Für $f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ definiere $f_k(x) := f(x + k)$. f_n is beschränkt in $W^{1,p}$ und ich behaupte, dass (f_k) keine $L^p(\mathbb{R}^n)$-konvergente Teilfolge haben kann. Angenommen mal, es hätte eine $L^p(\mathbb{R}^n)-$ konvergente Teilfolge. Was wäre dann wohl ihr Grenzwert ? Wie kann man das sehen ?

(d) Es sei $n \geq 3$ und $q \in [1, \infty)$ so dass $\exists S > 0$ derart, dass für alle $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$

$$||f||_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq S||\nabla f||_{L^2(\mathbb{R}^n)} \quad (2)$$

Zeige, dass dann $q = \frac{2n}{n-2}$ gilt. Zeige ferner, dass die Abschätzung auch für $f \in W^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ gilt. Verwende hierfür $W^{1,2}(\mathbb{R}^n) = W_0^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ und beweise diese Behauptung, falls du sie noch nicht kennst. **Hinweis**: Sei $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Definiere für $\lambda > 0$ die Funktion $f_\lambda(x) := f(\lambda x)$. Schreibe die Ungleichung (2) hin und beobachte, wie sich Linke seite und rechte Seite in λ skalieren um eine Ungleichung für f zu bekommen. Für andere Werte von q skaliert die Ungleichung so, dass für besonders kleine oder besonders große λ unerfüllbare Ungleichungen entstehen. Zu $W^{1,2}(\mathbb{R}^n) = W_0^{1,2}(\mathbb{R}^n)$. Es sei $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $0 \leq \eta \leq 1$ und $\eta \equiv 1$ auf $B_1(0)$ setze $\eta_\epsilon(x) := \eta(\epsilon x)$ und seien nun $(\phi_\epsilon)_{\epsilon > 0}$ die Standard-Mollifier. Dann ist $(f\eta_\epsilon) * \phi_\epsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ und

$$||(f\eta_\epsilon)*\phi_\epsilon - f||_{W^{1,2}} \leq ||(f\eta_\epsilon)*\phi_\epsilon - f*\phi_\epsilon||_{W^{1,2}} + ||f*\phi_\epsilon - f||_{W^{1,2}} \leq ||f\eta_\epsilon - f||_{W^{1,2}} + ||f*\phi_\epsilon - f||_{W^{1,2}} \quad (3)$$

Für den Rest der behauptung verwende das Lemma von Fatou.

Bemerkung: Das beweist dann Satz 6.1 zwar noch nicht, aber es erklärt, warum $q = \frac{2n}{n-2}$ das einzige $q \in [1, \infty)$ ist, für das wir die Aussage in Satz 6.1 erwarten können.

(e) Lies dir das folgende Resultat durch, wir werden es in Aufgabe 16 (d) benutzen, aber der Beweis wird hier nur eine Bonusaufgabe sein. Es sei $n \geq 3$ und $(f_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset W^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ derart dass $f_k \rightharpoonup f$ in $W^{1,2}(\mathbb{R}^n)$. Es sei $A \subset \mathbb{R}^n$ eine messbare Menge mit endlichem Lebesgue-Maß. Dann gilt $f_k \to f$ in $L^p(A)$ für jedes $1 \leq p < \frac{2n}{n-2}$

(f) BONUS: Zeige zunächst (oder vergewissere dich, dass du es weißt): Für $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ sei $\mathcal{F}(f) \in L^2(\mathbb{R}^n)$ die Fourier-Transformierte von f. Zeige

1. Falls g zusätzlich ncoh in $L^1(\mathbb{R}^n)$ ist gilt $\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g)$
2. Es gilt $||\mathcal{F}(f)||_{L^2(\mathbb{R}^n)} = ||f||_{L^2(\mathbb{R}^n)}$.
3. Falls $f \in W^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ so gilt $\mathbb{R}^n \ni k \mapsto |k|\mathcal{F}(f)(k) \in L^2(\mathbb{R}^n)$ und für $j = 1, .., n$ gilt $\mathcal{F}(\partial_j f) = 2\pi i k_j \mathcal{F}(f)$.

(g) BONUS: Definiere für $g \in W^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ und $t > 0$ zunächst

$$g_t(x) := \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(\frac{-|x-y|^2}{2t}\right) g(y) dy \quad (4)$$

Zeige, dass

$$|g_t(x)| \leq ||g||_{L^{\frac{2n}{n-2}}} \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\frac{|y|^2 n}{4t} dy \right) \right)^{\frac{2}{n}} \tag{5}$$

(i) Zeige, dass $\mathcal{F}(g_t)(k) = e^{-4\pi^2|k|^2 t}\mathcal{F}(g)(k)$ und folgere, dass

$$||g - g_t||^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{F}(f)(k)|^2 (1 - e^{-4\pi^2|k|^2 t})^2 dk \tag{6}$$

(ii) Lies dir folgende Abaschätzung durch und begründe jeden Schritt.

$$1 - \exp(-4\pi^2|k|^2 t) \leq \min(1, 4\pi^2|k|^2 t) \leq \min(1, 2\pi|k|\sqrt{t}) \leq 2\pi|k|\sqrt{t} \tag{7}$$

(iii) Schließe, dass

$$||g - g_t||_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq ||\nabla g||_{L^2(\mathbb{R}^n)}\sqrt{t}. \tag{8}$$

(h) BONUS: Sei nun $f_n \rightharpoonup f$ in $W^{1,2}(\mathbb{R}^n)$. Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ mit endlichem Maß. Zeige mit (4), dass für jedes $t > 0$ gilt $(f_n)_t \to f_t$ punktweise f.ü. Konstruiere mit (5) eine $L^2(A)$ Majorante von $(f_n)_t$ und folgere mit dem Satze von Lebesgue, dass $(f_n)_t \to f_t$ in $L^2(A)$. Schließe dann mit (8), dass $f_n \to f$ in $L^2(A)$.

16. (Der Beweis von Lemma 6.3, Schwach-Stetigkeit der potenziellen Energie)

(a) Es sei $(\psi_k) \subset W^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ so dass $\psi_k \rightharpoonup \psi$ in $W^{1,2}(\mathbb{R}^n)$. Zeige dass auch $(\psi_k)_{|A} \rightharpoonup \psi_{|A}$ in $W^{1,2}(A)$ für jede offene Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$.

(b) Es sei $v \in L^{\frac{n}{2}}(\mathbb{R}^n)$ und $(\psi_j) \subset W^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ derart, dass $\psi_j \rightharpoonup \psi$ in $W^{1,2}(\mathbb{R}^n)$. Zeige

$$\int_{\mathbb{R}^n} v(x)|\psi_j(x)|^2 dx \to \int_{\mathbb{R}^n} v(x)|\psi(x)|^2 dx \tag{9}$$

Hinweis: Definiere zunächst $C_r = B_r(0) \cap \{x \in \mathbb{R}^n | |V(x)| < r\}$ und teile die obenstehenden Integrale in Integrale über C_r und C_r^C auf. Für C_r versuche dich zu überzeugen, dass $\psi_j \to \psi$ in $L^2(C_r)$. Leicht problematisch ist, dass C_r im Allgemeinen keinen C^1-glatten Rand hat und Rellich-Kondrachow deswegen nicht auf C_r angewendet werden kann (worauf sonst?). Schau dir an was auf C_r^C für große r passiert.

(c) Es sei (ψ_j) wie in Aufgabe(b) und $w \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ derart, dass für alle $\alpha > 0$ die Menge $\{x \in \mathbb{R}^n | |w(x)| > \alpha\}$ beschränkt ist. Zeige, dass

$$\int_{\mathbb{R}^n} w(x)|\psi_j(x)|^2 dx \to \int_{\mathbb{R}^n} w(x)|\psi(x)|^2 \tag{10}$$

(d) Sei nun $w \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ derart, dass für alle $\alpha > 0$ die Menge $\{x \in \mathbb{R}^n | |w(x)| > \alpha\}$ endliches Maß hat. Zeige unter Verwendung von Aufgabe 15 e, dass

$$\int_{\mathbb{R}^n} w(x)|\psi_j(x)|^2 dx \to \int_{\mathbb{R}^n} w(x)|\psi(x)|^2 dx \tag{11}$$

(e) Fasse deine Beobachtungen zusammen zu einem Beweis von Lemma 6.3.

Hinweis: Der Beweis enhält noch eine kleine Subtilität : Sei $V \in L^{\frac{n}{2}} + L^\infty$ so dass für jedes $\alpha > 0$ gilt, dass $\lambda(\{x \in \mathbb{R}^n | |V(x)| > \alpha\}) < \infty$. Ist nun $V = v + w$ für $v \in L^{\frac{n}{2}}$ und $w \in L^\infty$ so muss für eine korrekte Anwendung von Teilaufgabe (d) auch noch gezeigt werden, dass für jedes $\alpha > 0$ die Menge $\{x \in \mathbb{R}^n | |w(x)| > \alpha\}$ endliches Lebesgue-Maß hat.

17. (Nichtexistenz von Grundzuständen, Existenz angeregter Zustände)

Es sei $V \in L^{\frac{n}{2}}(\mathbb{R}^n) + L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Definiere wie in der Vorlesung

$$\mathcal{E}(\psi) := \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla\psi|^2 + V(x)|\psi(x)|^2 \tag{12}$$

In Satz 6.4 haben wir gezeigt, dass

$$E_0 := \inf_{\psi \in W^{1,2}(\mathbb{R}^n), ||\psi||_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 1} \mathcal{E}(\psi) < 0 \tag{13}$$

impliziert, dass es sein $\psi_0 \in W^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ mit $||\psi||_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 1$ gibt derart, dass $\mathcal{E}(\psi_0) = E_0$ und ψ_0 ist eine schwache Lösung der Schrödingergleichung, d.h

$$\int_{\mathbb{R}^n} \nabla\psi_0 \nabla\phi + \int_{\mathbb{R}^n} V(x)\psi_0\phi = E_0 \int_{\mathbb{R}^n} \psi_0\phi \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \tag{14}$$

Wie man sich mit den üblichen Techniken überlegen kann ist $W^{1,2}(\mathbb{R}^n) = W_0^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ und deswegen gilt auch

$$\int_{\mathbb{R}^n} \nabla\psi_0 \nabla\phi + \int_{\mathbb{R}^n} V(x)\psi_0\phi = E_0 \int_{\mathbb{R}^n} \psi_0\phi \quad \forall \phi \in W^{1,2}(\mathbb{R}^n) \tag{15}$$

(a) Nur für diese Teilaufgabe sei $V \equiv 0$. Zeige, dass dann

$$\inf_{\psi \in W^{1,2}(\mathbb{R}^n), ||\psi||_{L^2} = 1} \mathcal{E}(\psi) = 0 \tag{16}$$

Zeige auch: Es gibt kein $\psi \in W^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ mit $\mathcal{E}(\psi) = 0$.

(b) Es seien die Vorraussetzungen von Satz 6.4 erfüllt und ψ_0 wie in Satz 6.4. Definiere

$$M_0^\perp := \left\{ \psi \in W^{1,2}(\mathbb{R}^n) \middle| \; ||\psi||_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 1, (\psi, \psi_0)_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} \psi\psi_0 dx = 0 \right\} \tag{17}$$

Zeige: Ist

$$E_1 := \inf_{\psi \in M_0^\perp} \mathcal{E}(\psi) < 0 \tag{18}$$

so existiert $\psi_1 \in M_0^\perp$ so, dass

$$\mathcal{E}(\psi_1) = \inf_{\psi \in M_0^\perp} \mathcal{E}(\psi) = E_1 \tag{19}$$

(c) Wir wollen im Folgenden zeigen, dass der Minimierer auch die Schrödinger-Gleichung

$$-\Delta\psi_1 + V\psi_1 = E_1\psi_1 \tag{20}$$

erfüllt. Sei zunächst $\phi \in W^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ derart, dass $(\psi_0, \phi)_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 0$. Dann gibt es $\epsilon_0 > 0$ derart dass für $|\epsilon| < \epsilon_0$

$$\psi_\epsilon := \frac{\psi_1 + \epsilon\phi}{||\psi_1 + \epsilon\phi||_{L^2(\mathbb{R}^n)}} \in M_0^\perp \tag{21}$$

Zeige, dass dann gilt

$$\int \nabla\psi_1 \nabla\phi + \int_{\mathbb{R}^n} V\psi_1\phi = E_1 \int \psi_1\phi. \tag{22}$$

(d) Sei nun $\phi \in W^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ allgemein. Verwende orthogonale Projektionen in $L^2(\mathbb{R}^n)$ um zu zeigen, dass

$$\int \nabla\psi_1 \nabla\phi + \int_{\mathbb{R}^n} V\psi_1\phi = E_1 \int \psi_1\phi \tag{23}$$

Hinweis: Falls $\phi \in W^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ so erfüllt $\widetilde{\phi} = \phi - (\phi, \psi_0)_{L^2(\mathbb{R}^n)}\psi_0$ die Bedingung aus Aufgabe (c). Setze $\widetilde{\phi}$ in (22) ein und verwende, dass ψ_0 selbst eine Schrödinger-Gleichung schwach löst.

(e) Im Sinne der Vorlesung müsste man jetzt definieren, dass ψ_1 ein **erster angeregter Zustand** ist. Den Zusatnd angeregt zu nennen macht aber physikalisch nur Sinn, wenn er ein höheres Energieniveau besitzt, d.h. wenn $E_1 > E_0$ ist. Hierfür braucht man Eindeutigkeit des Minimierers (bis auf Vorzeichen). Diese werden wir nicht komplett zeigen, ein wichtiger Schritt ist aber die folgende Teilaufgabe:

(f) Es sei ψ_0 wie in Satz 6.4. Dann gilt entweder ψ_0^+ oder ψ_0^- sind ungleich Null. O.b.d.A sei für diese Teilaufgabe $\psi^+ \neq 0$. Verwende die Schrödinger-Gleichung um zu zeigen, dass

$$\mathcal{E}\left(\frac{\psi_0^+}{||\psi_0^+||_{L^2(\mathbb{R}^n)}}\right) = E_0 \tag{24}$$

und finde damit einen nichtnegativen Minimierer. Zeige dann, dass es kein weiteres Energieniveau E geben kann sodass die Schrödingergleichung $-\Delta\psi + V\psi = E\psi$ eine nichtnegative schwache Lösung besitzt.

Hinweis: Schreibe die Schrödingergleichung in ihrer schwachen Form für ψ_0 hin und setze dort $\frac{\psi_0^+}{||\psi_0^+||_{L^2}}$ als Testfunktion ein. Verwende, was du aus Aufgabe 10 auf Blatt 3 über deren schwache Ableitung weißt.

(g) Wir wollen die Schrödingergleichung für das Wasserstoffatom explizit lösen. Dazu sei $V(x) = -\frac{1}{|x|}$. Wir probieren, eine Lösung von

$$-\Delta\psi - \frac{\psi}{|x|} = E_0\psi \tag{25}$$

zu finden in einem Funktionenraum, den wir zunächst nicht spezifizieren. Nehme zunächst an, dass die Lösung dieser Gleichung radial ist, d.h $\psi(x) = \psi(|x|)$. Verwende Polarkoordinaten, um die Gleichung auf eine Differentialgleichung erster Ordnung zurückzuführen. Du erhältst eine nichtnegative Lösung. Verwende Aufgabe (f) um zu zeigen, dass es sich bei dieser Lösung um einen Grundzustand handeln muss.