Cheat Sheet

Partielle Differenzialgleichungen und ihre assoziieren Variationsprobleme

Das Dirichletproblem

$$(DP) \quad \begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega \end{cases} \qquad f \in L^2(\Omega)$$

schwach $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ und $\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\int \nabla u \nabla \varphi \, dx = \int f \varphi \, dx$$

Variationsproblem:

$$\mathcal{E} : W_0^{1,2}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\mathcal{E}(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 - \int_\Omega f u$$

Das p-Dirichletproblem $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,\ f\in L^q(\Omega)$

$$(DP_p)\quad \begin{cases} -\operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right)=f & \text{in } \Omega \\ u=0 & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

schwach $u\in W_0^{1,p}(\Omega)$ und $\forall \varphi\in C_0^\infty(\Omega)$

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla\varphi\,dx=\int_\Omega f\varphi\,dx$$

Variationsproblem

$$\mathcal{E}:\ W_0^{1,p}(\Omega)\longrightarrow\mathbb{R}$$

$$\mathcal{E}(u)=\frac{1}{p}\int_\Omega|\nabla u|^p-\int_\Omega fu$$

Minimalflächengleichungen für Lipschitz-Graphen

$$(MF_{Lip})\quad \begin{cases} -\operatorname{div}\left(\dfrac{Du}{\sqrt{1+|Du|^2}}\right) = 0 & \text{in } \Omega \\ u = g & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

$[g \in Lip(\Omega)]$

<u>schwach</u>

~~$u-g \in W_0^1$~~ $u \in Lip(\Omega)$

$$u-g \equiv 0 \text{ auf } \partial\Omega$$

$$0 = \int \frac{Du\, D\varphi}{\sqrt{1+|Du|^2}}\, dx \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

<u>Variationsproblem</u>

$$\mathcal{E} : \{u \in Lip(\Omega) : u|_{\partial\Omega} = g|_{\partial\Omega}\} \to \mathbb{R}$$

$$\mathcal{E}(u) = \int \sqrt{1+|Du|^2}\, dx$$

Minimalflächengleichung für Flächen vom Typ ∂B

$B = B_1(0) \subset \mathbb{R}^2$

$$(MF) \quad \begin{cases} F \in W^{1,2}(B; \mathbb{R}^m), \quad F|_{\partial B} \in C^0(\partial B, \mathbb{R}^m) \\ F|_{\partial B} \text{ schw auch monotone parametrisierung von } \gamma \in C^0(\partial B, \text{[illegible]}) \\ H = 0 \end{cases}$$

Variationsprobleme

1. Dirichlet

$$\mathcal{D}(F) := \frac{1}{2} \int_B \left(|\partial_{x_1} F|^2 + |\partial_{x_2} F|^2 \right) dx$$

$(F \in K[\gamma])$

2. Oberfläche

$$\mathcal{A}(F) = \int_B \sqrt{|\partial_{x_1} F|^2 |\partial_{x_2} F|^2 - (\partial_{x_1} F \cdot \partial_{x_2} F)^2}$$

$(F \in K[\gamma])$

Die Schrödinger Gleichung

$V \in L^{\frac{n}{2}} + L^{\infty}$, $n \geq 3$, $\psi_0 \in W^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ $\|\psi_0\|_{L^2} = 1$,

$\forall \alpha > 0 \ |\{x \in \mathbb{R}^n \,|\, |V(x)| > \alpha\}| < \infty$

$$(S) \begin{cases} -\Delta \psi_0 + V\psi_0 = E_0 \psi_0 \\ \|\psi_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 1 \end{cases}$$

Variationsproblem

$$\mathcal{E} : \{\psi \in W^{1,2}(\mathbb{R}^n) \,|\, \|\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 1\} \to \mathbb{R}$$

$$\mathcal{E}(\psi) = \int_{\mathbb{R}^n} |D\psi|^2 dx + \int V \psi^2 dx$$

Reaktions-Diffusions-Gleichung

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt

$$\lambda < \lambda_1(\Omega) := \inf_{\substack{u \in W_0^{1,2}(\Omega) \\ u \neq 0}} \left\{ \frac{\int |\nabla u|^2 dx}{\int u^2 dx} \right\}$$

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u + |u|^{p-1} u & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

$p \in (1, \infty)$ falls $n = 2$, $p \in (1, \frac{n+2}{n-2})$ falls $n \geq 3$

schwach

$$\int \nabla u \nabla \varphi = \lambda \int u \varphi + \int |u|^{p-1} u \varphi \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

Variationsproblem

$$\mathcal{E} : \{ v \in W_0^{1,2}(\Omega) \mid \|v\|_{p+1} = 1 \} \to \mathbb{R}$$

$$\mathcal{E}(u) := \int |\nabla u|^2 - \lambda \int u^2$$