Variationsrechnung Blatt 6

18a

$A \subset \mathbb{R}^n$ zusammenhängend

z.z. $\bar{A} \subset \mathbb{R}^n$ zusammenhängend

Definition (Zusammenhang)

$B \subset \mathbb{R}^n$ heißt zusammenhängend falls

$\forall\, U_1, U_2 \subset \mathbb{R}^n$ offen : $\cdot\ (B \cap U_1) \cap (B \cap U_2) = \emptyset$

$\cdot\ (B \cap U_1) \cup (B \cap U_2) = B$

folgt $B \cap U_1 = \emptyset$ oder $B \cap U_2 = \emptyset$

Sei also $A \subset \mathbb{R}^n$ zusammenhängend

und $U_1, U_2 \subset \mathbb{R}^n$ offen sodass

$\cdot\ (\bar{A} \cap U_1) \cap (\bar{A} \cap U_2) = \emptyset$

$\cdot\ (\bar{A} \cap U_1) \cup (\bar{A} \cap U_2) = \bar{A}$

Nun: $(A \cap U_1) \cap (A \cap U_2) = \emptyset$

und $(A \cap U_1) \cup (A \cap U_2) = A \cap \left[(\bar{A} \cap U_1) \cup (\bar{A} \cap U_2) \right]$

$= A \cap \bar{A} = A$ da $\bar{A} \supset A$

$\xRightarrow[\text{hängend}]{A \text{ zusammen-}} A \cap U_1 = \emptyset$ oder $A \cap U_2 = \emptyset$

<u>Fall 1</u> $A \cap U_1 = \emptyset \Rightarrow A \subset U_1^c$

$\overset{U_1^c \text{ abg.}}{\Longrightarrow} \bar{A} \subset U_1^c \Rightarrow \bar{A} \cap U_1 = \emptyset$

<u>Analog</u>: $A \cap U_2 = \emptyset \Rightarrow \bar{A} \cap U_2 = \emptyset$

18 b) [wie in Satz 2.1, erster Teil des Beweises]

Seien $(P_k) \subset P$ sodass

$$\beta_k := \sup_{x \in P_k} \mathcal{E}(x) \longrightarrow \beta$$

OBdA $\beta_1 \geq \beta_2 \geq \dots$

Setze

$$A_0 := \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \mathcal{E}(x) \leq \beta \}$$

Dann

A_0 kompakt, und $P_k \subset A_0 \ \forall k$

Dazu

$$A_\ell := \overline{\bigcup_{k \geq \ell} P_k}$$

A_ℓ abgeschlossen ✓

A_ℓ beschränkt da $A_\ell \subset A_0$

$\xrightarrow[\text{Borel}]{\text{Heine}}$ A_ℓ kompakt

$x_1, x_2 \in A_\ell$ nach Konstruktion ✓

Behauptung A_ℓ ist zusammenhängend $\forall \ell$,

insbesondere $A_\ell \in \mathcal{P}$ $\forall \ell \in \mathbb{N}$.

Beweis

Es genügt $\overset{\text{nach (a)}}{\text{}}$ zu zeigen dass

$\bigcup_{k \geq \ell} P_k$ zusammenhängend ist

Angenommen

$\exists\, O_1, O_2 \subset \mathbb{R}^n$ offen

$$\left(O_1 \cap \left(\bigcup_{k\geq \ell} P_k\right)\right) \cap \left(O_2 \cap \left(\bigcup_{k \geq \ell} P_k\right)\right) = \emptyset$$

und

$$\left(O_1 \cap \left(\bigcup_{k\geq \ell} P_k\right)\right) \cup \left(O_2 \cap \bigcup_{k\geq \ell} P_k\right) = \bigcup_{k \geq \ell} P_k$$

OBdA $x_1 \in O_1$ sonst nummeriere um

Nun nimm an $\bigcup_{k\geq l} P_k \cap O_2 \neq \emptyset$

$\Longrightarrow \exists\, k_0 \geq l : \; P_{k_0} \cap \cancel{\bigcup_{k\geq l} P_k}\; O_2 \neq \emptyset$

$$P_{k_0} = P_{k_0} \cap \bigcup_{k\geq l} P_k$$

$$= P_{k_0} \cap \left[\left(O_1 \cap \bigcup_{k\geq l} P_k \right) \cup \left(O_2 \cap \bigcup_{k\geq l} P_k \right) \right]$$

$$= (P_{k_0} \cap O_1) \cup (P_{k_0} \cap O_2)$$

Jedoch

$$(P_{k_0} \cap O_1) \cap (P_{k_0} \cap O_2) \subset \left(\left(\bigcup_{k\geq l} P_k \right) \cap O_1 \right) \cap \left(\bigcup_{k\geq l} P_k \cap O_2 \right)$$

$$= \emptyset$$

$\xRightarrow[\text{sammenhängend}]{P_{k_0} \text{ zu-}}$ $P_{k_0} \cap O_1 = \emptyset$

oder $P_{k_0} \cap O_2 = \emptyset$ $\quad ↯$

denn $P_{k_0} \cap O_2 \neq \emptyset$ und

$x_1 \in P_{k_0} \cap O_1$

Damit muss gelten

$$\bigcup_{k \geq l} P_k \cap O_2 = \emptyset$$

$\Longrightarrow A_l \in \mathcal{P} \quad \forall l \in \mathbb{N} \quad , \quad \sup_{x \in A_l} \Sigma(x) \leq \beta_l \quad \forall l \in \mathbb{N}.$

Nun $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \dots$

Sei $P_0 := \bigcap_{l=1}^{\infty} A_l = \bigcap_{l=1}^{\infty} \bigcup_{k \geq l} P_k$

Beh. $P_0 \in \mathcal{P}$ und $\sup_{x \in P_0} \Sigma(x) = \beta$

Beweis. P_0 Kompakt, $x_1, x_2 \in P_0$ ist klar ✓

Zwi-Beh 1:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists l_0 \in \mathbb{N} : \ \forall l \geq l_0 \quad A_l \subset U_\varepsilon(P_0)$$
$$= \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, P_0) < \varepsilon\}$$

Ang. $\exists l_j \to \infty$ ~~$\exists \varepsilon_0 > 0$~~ $x_j \in A_{l_j} \setminus U_{\varepsilon_0}(P_0)$

Nun da A_{l_j} beschränkt hat x_j eine konv. TF (x_{j_k}) etwa gegen $x \in \mathbb{R}^n$

Nun

$$x_{j_k} \in A_{\ell_{j_k}} \overset{A_t \subset A_{t-1}}{\Longrightarrow} x_{j_k} \in A_t \quad \forall\, t = 1, \dots, \ell_{j_k}$$

$$\underset{\forall t \in \mathbb{N}}{\overset{A_t \text{ abg.}}{\Longrightarrow}} \; x \in A_t \quad \forall\, t = 1, \dots, \ell_{j_k}$$

Nun $k \to \infty \Rightarrow \ell_{j_k} \to \infty$

Damit

$$x \in \bigcap_{t=1}^{\infty} A_t = P_0$$

$\lightning$ da $\operatorname{dist}(x_j, P_0) \geq \varepsilon_0$

$$\downarrow$$

$$\operatorname{dist}(x, P_0) = 0$$

Nun

Seien

$\tilde{O}_1, \tilde{O}_2$ offen $(\tilde{O}_1 \cap P_0) \cap (\tilde{O}_2 \cap P_0) = \emptyset$

und $(\tilde{O}_1 \cap P_0) \cup (\tilde{O}_2 \cap P_0) = P_0$

Setze $Q_1 = \cancel{\tilde{O}_1 \setminus}\ P_0 \setminus \tilde{O}_1$

$Q_2 = P_0 \setminus \tilde{O}_2$

beide abgeschlossen und $\subset P_0$ also kompakt.

Dann

$$Q_1 \cup Q_2 = (P_0 \setminus \tilde{O}_1) \cup (P_0 \setminus \tilde{O}_2)$$

$$= [P_0 \setminus (\tilde{O}_1 \cap P_0)] \cup [P_0 \setminus (\tilde{O}_2 \cap P_0)]$$

$$= P_0 \setminus ((\tilde{O}_1 \cap P_0) \cap (\tilde{O}_2 \cap P_0)) = P_0$$

$$Q_1 \cap Q_2 = P_0 \setminus ((\tilde{O}_1 \cap P_0) \cup (\tilde{O}_2 \cap P_0))$$

$$= P_0 \setminus P_0 = \emptyset$$

$\xrightarrow[\text{Kompakte Mengen haben pos. Abstand}]{\text{disjunkte}}$ $\exists\, \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(Q_1) \cap U_\varepsilon(Q_2) = \emptyset$

Aber

$$U_\varepsilon(P_0) = U_\varepsilon(Q_1) \cup U_\varepsilon(Q_2)$$

und $\exists\, l_0$: $A_l \subset U_\varepsilon(P_0)$ $\forall\, l \geq l_0$

d.h. für $l \geq l_0$
$$A_l = (U_\varepsilon(Q_1) \cap A_l) \cup (U_\varepsilon(Q_2) \cap A_l)$$

und $$\emptyset = (U_\varepsilon(Q_1) \cap A_l) \cap (U_\varepsilon(Q_2) \cap A_l)$$

$$\Rightarrow A_l \cap U_\varepsilon(Q_1) = \emptyset \quad \text{oder} \quad A_l \cap U_\varepsilon(Q_2) = \emptyset$$

$$\Rightarrow \underbrace{P_0 \cap U_\varepsilon(Q_1)}_{= Q_1} = \emptyset \quad \text{oder} \quad \underbrace{P_0 \cap U_\varepsilon(Q_2)}_{= Q_2} = \emptyset$$

$$\cancel{(\varepsilon \to 0) \Rightarrow P_0 \cap Q_1 = \emptyset \quad \text{oder} \quad P_0 \cap Q_2 = \emptyset}$$

$$\Rightarrow Q_1 = \emptyset \quad \text{oder} \quad Q_2 = \emptyset$$

$$\Rightarrow P_0 \cap U_2 = \emptyset \quad \text{oder} \quad P_0 \cap U_1 = \emptyset$$

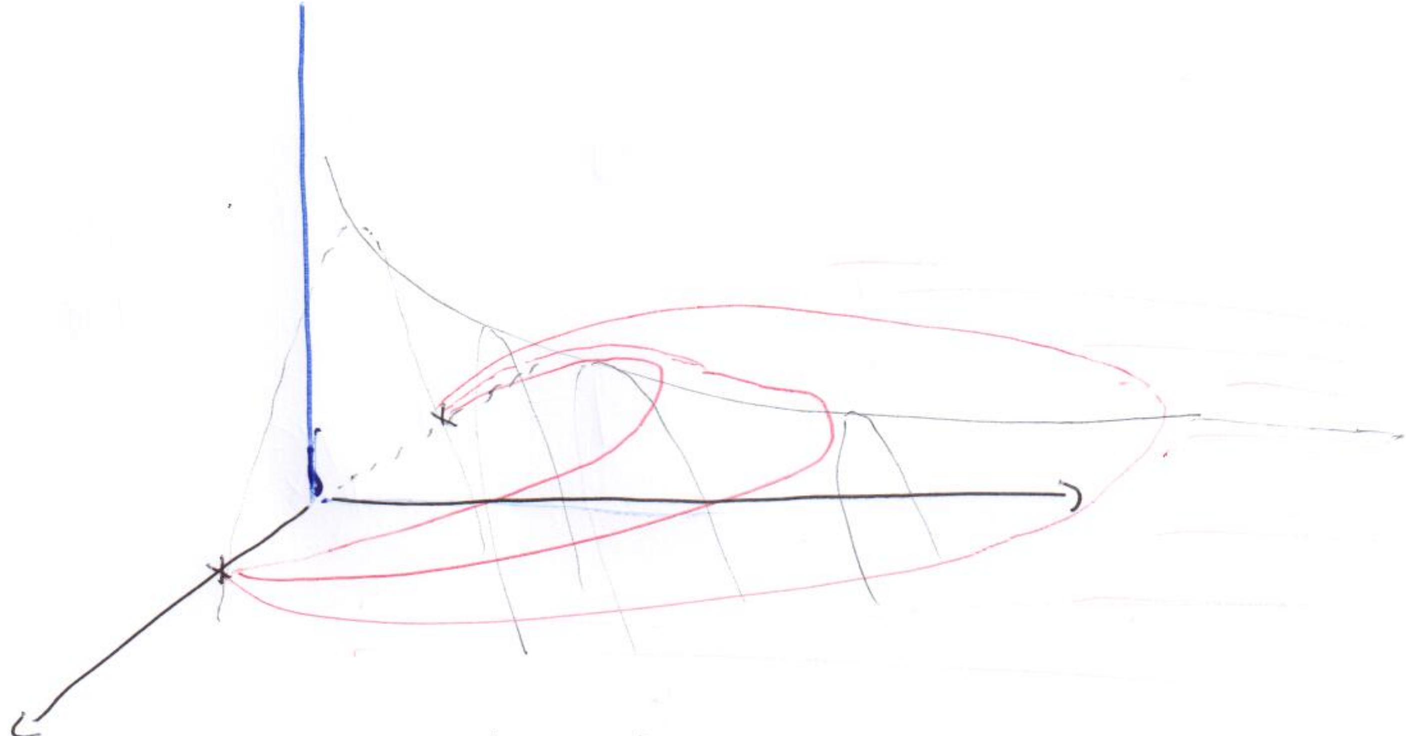
Nun

$$\sup_{x \in P_0} \mathcal{E}(X) \geq \beta \quad \text{da} \quad P_0 \in \mathcal{P}$$

$$\beta \leq \sup_{x \in P_0} \mathcal{E}(X) \leq \sup_{x \in A_\ell} \mathcal{E}(X) \overset{\mathcal{E}\text{ stetig}}{=} \sup_{x \in \bigcup_{k \geq \ell} P_k} \mathcal{E}(X) \leq \beta_\ell \longrightarrow \beta$$

$$\Longrightarrow \quad \sup_{x \in P_0} \mathcal{E}(x) = \beta$$

(c) Idee



$$f(x,y) = e^{-y} - x^2$$

$$(x_1, y_1) = (-1, 0)$$

$$(x_2, y_2) = (1, 0)$$

$$f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2) = 0$$

$p \in \mathcal{P}$

$\Longrightarrow \exists \; s \in P : \; s_1 = 0$ denn sonst

$P = (P \cap \{y_1 < 0\}) \cup (P \cap \{y_1 > 0\})$

und $\emptyset = (P \cap \{y_1 < 0\}) \cap (P \cap \{y_1 > 0\})$

<u>Nun daher</u>

$$\forall P \in \mathcal{P}: \sup_{s \in P} \mathcal{E}(s) > 0$$

denn auf der y-Achse $\{s_1 = 0\}$

gilt $\mathcal{E}(s) > 0$,

Nun daher

$$\inf_{P \in \mathcal{P}} \sup_{s \in P} \mathcal{E}(s) \geq 0$$

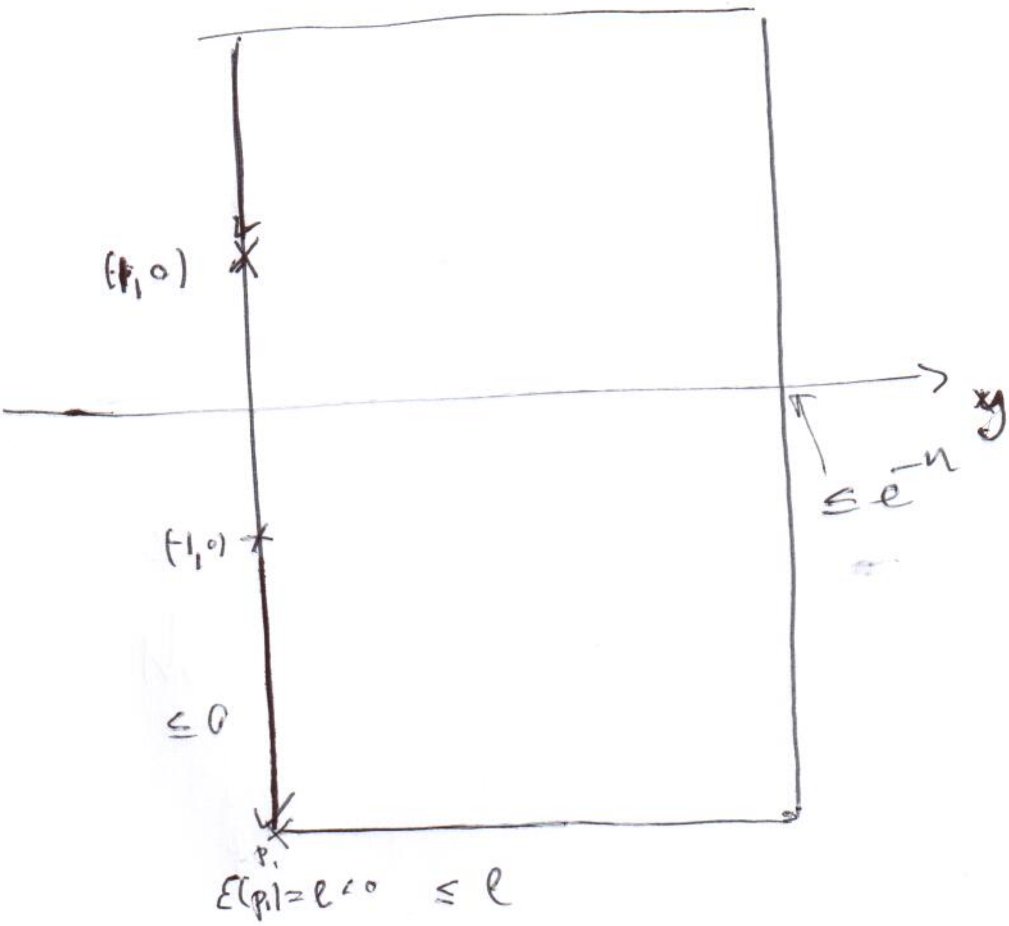
Betrachte

$$\cancel{P_n := (\{0\} \times [-1, -n]) \cup \{-n\} \times [0}$$

$$P_n := ([-1, -n] \times \{0\}) \cup (\{-n\} \times [-n, n]) \cup ([-n, n] \times \{n\}) \cup (\{n\} \times [0, n]) \cup ([1, n] \times \{0\})$$

<u>Dann</u>

$$\mathcal{E}(x) \leq e^{-n} \quad \forall x \in P_n$$



$(p_1, 0)$
y
$\leq e^{-n}$
$(-1, 0)$
≤ 0
p_1
$\mathcal{E}(p_1) = \ell < 0$
$\leq \ell$

A18d)

Wäre $\mathcal{N}_\alpha$ ~~kompakt~~ ~~und~~ zusammenhängend

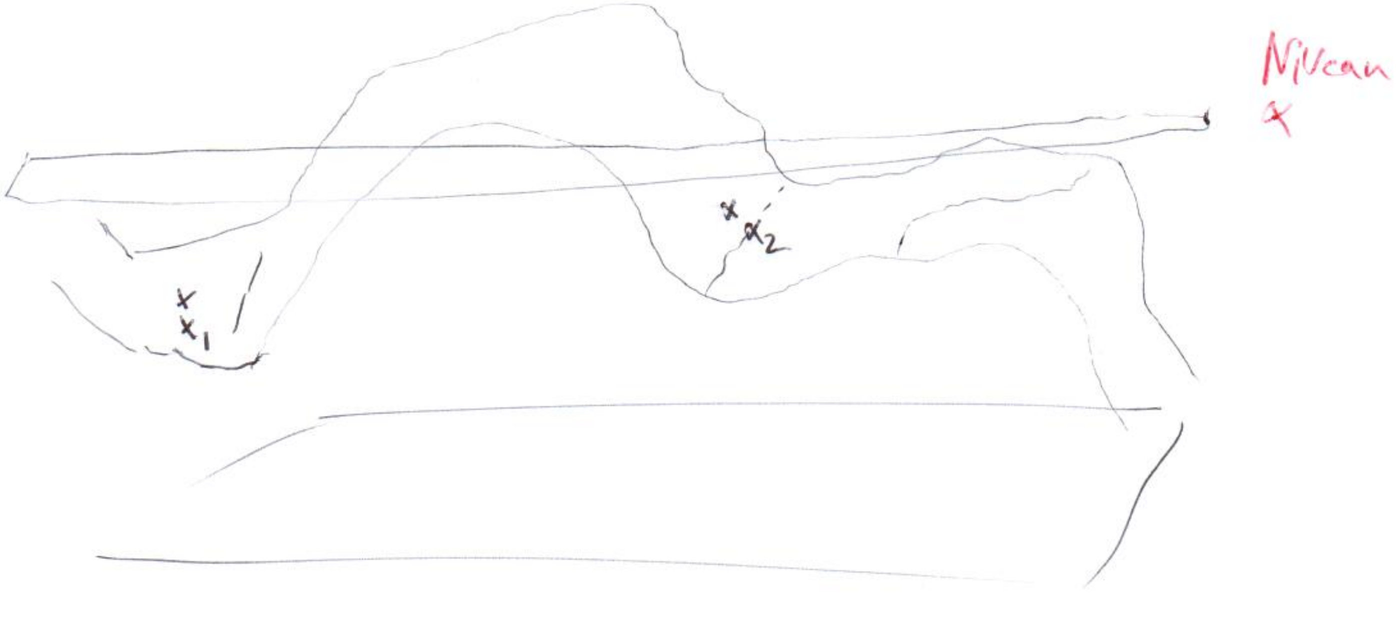
so wäre N_α auch kompakt da

$\mathcal{E}$ koerziv. Außerdem $x_1, x_2 \in \mathcal{N}_\alpha$

$$\Rightarrow \mathcal{N}_\alpha \in \mathcal{P}$$

$$\Rightarrow \beta \leq \sup_{x \in \mathcal{N}_\alpha} \mathcal{E}(x) \leq \alpha \quad \lightning$$

Anschaulich



19) a] $\Omega = (0,1)$

$u(x) = \frac{1}{2} - x$

$u \in W^{2,2}((0,1))$

da $u \in C^2(0,1)$ und

$u, u', u'' \in L^\infty(0,1) \subset L^2(0,1)$

$$u^+(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} - x & x \le \frac{1}{2} \\ 0 & x \ge \frac{1}{2} \end{cases}$$

$u^+ \in W^{1,2}(0,1)$ mit Ableitung

$$(u^+)'(x) = \begin{cases} -1 & x < \frac{1}{2} \\ 0 & x \ge \frac{1}{2} \end{cases} \qquad (*)$$

$u^+ \in W^{2,2}(0,1)$ denn wäre

$u^+ \in W^{2,2}(0,1)$ so wäre $(u^+)' \in W^{1,2}(0,1)$

Jedoch $(u^+)'$ ist unstetig, siehe $(*)$.

$\boxed{19b}$

Es sei $w \in C^*$ und $\alpha \geq 0$

Z: $\alpha w \in C^*$

Sei $v \in C$

$$(\alpha w, v) = \underbrace{\alpha}_{\geq 0} \underbrace{(w, v)}_{\leq 0} \leq 0.$$

19 c)

Idee Benutze das Proximum auf C.

Es bezeichne für $x \in H$

$P_C(x) :=$ das eindeutige Element $y \in C$ mit

$$\|y - x\| = \inf_{z \in C} \|z - x\|$$

Wiederholung (Variationsungl.) $\forall z \in C : (x - P_C(x), z - P_C(x)) \le 0$

Nun sei $u \in H$

Definiere $u_1 \in C$ als $u_1 = P_C(u)$

und $u_2 := u - P_C(u)$

Z (i) $(u_1, u_2) = 0$ und

(ii) $u_2 \in C^*$.

Sei $v \in C$

Zu (ii): $(u_2, v) = (u - P_C(u), v)$

$$= \underbrace{(u - P_C(u), v - P_C(u))}_{\le 0} + \underbrace{(u - P_C(u), P_C(u))}_{= 0, \text{ wenn}}$$

wegen Variationsungl

(i) gezeigt ist

Zu (i)

$$(u - P_C(u), P_C(u))$$

$$= (u - P_C(u), \underbrace{2P_C(u)}_{\substack{\in C \text{ da} \\ C \text{ Kegel}}} - P_C(u))$$

$$\leq 0$$

$$(u - P_C(u), P_C(u)) \geq 0$$

$$= - \underbrace{(u - P_C(u), \underbrace{0}_{\substack{0 \in C \text{ da} \\ 0 = 0 \cdot v \text{ für ein } v \in C}} - P_C(u))}_{\leq 0}$$

$$\Longrightarrow (u - P_C(u), P_C(u)) = 0$$

(d)

$$\|u-v\|^2 = \|u_1+u_2 - (v_1+v_2)\|^2$$

$$= \|u_1-v_1 + (u_2-v_2)\|^2$$

$$= \|u_1-v_1\|^2 + \|u_2-v_2\|^2 + 2(u_1-v_1 \mid u_2-v_2)$$

$$= \|u_1-v_1\|^2 + \|u_2-v_2\|^2 + 2\Big[(u_1 \mid u_2) + (v_1 \mid v_2) - \underbrace{(v_1 \mid u_2)}_{\substack{\leq 0 \text{ da} \\ v_1 \in C \\ u_2 \in C^*}} - \underbrace{(v_2 \mid u_1)}_{\substack{\leq 0 \text{ da} \\ u_1 \in C \\ v_2 \in C^*}}\Big]$$

$$\geq \|u_1-v_1\|^2 + \|u_2-v_2\|^2$$

(e) <u>Überraschung:</u>

So wie die Aufgabe gestellt war, hat sie doch gestimmt.

$$W_0^{1,2}(\Omega) \cap W^{2,2}(\Omega) \qquad \Omega \ C^2 \text{ glatt berandet}$$

ist ein Hilbertraum mit

$$(u,v) := \int \Delta u \, \Delta v \, dx$$

<u>Bew:</u>

$(\cdot,\cdot)$ ist Skalarprodukt, denn:

Linearität ✓

Symmetrie ✓

Positivität ✓

<u>Definitheit:</u>

Sei $(u,u) = 0 \implies \int (\Delta u)^2 \, dx = 0$

$$\implies u \text{ löst (DP)} \quad \begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{in } \partial\Omega \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \int_\Omega Du\, D\varphi = 0 \quad \forall \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$$

$$\Longrightarrow u = 0$$

<u>Bem.</u> $\left(W_0^{1,2}(\Omega) \cap W^{2,2}(\Omega),\ \|u\| := \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)} \right)$

ist vollständig

<u>Bew</u>

Sei $(u_n) \subset W_0^{1,2}(\Omega) \cap W^{2,2}(\Omega)$

eine Cauchy-Folge

d.h

$$\limsup_{n,m\to\infty} \|\Delta(u_n - u_m)\| = 0$$

Nun $u_n - u_m \in W_0^{1,2}(\Omega)$ denn wegen

Gilbarg-Trudinger Lemma 9.17

(oder ÜA 20(b)) gilt

$$\|u_n - u_m\|_{W^{2,2}(\Omega)} \leq C \|\Delta(u_n - u_m)\|_{L^2(\Omega)}$$

$\Rightarrow (u_n)$ Cauchy in $W^{2,2}(\Omega)$

Aufgabe 2a

(a)

(i) $f(\rho) = \frac{1}{\alpha_n \rho^{n-1}} \int_{\partial B_\rho(x)} u(y)\, dS(y)$

$$= \frac{1}{\alpha_n} \int_{\partial B_1(0)} u(x+\rho z)\, dS(z)$$

$$f'(\rho) = \frac{1}{\alpha_n} \int_{\partial B_1(0)} \nabla u(x+\rho z) \cdot z\, dS(z)$$

$$= \frac{1}{\alpha_n} \int_{\partial B_1(0)} \nabla u(x+\rho z)\, \nu(z)\, dS(z)$$

$$= \frac{1}{\alpha_n} \int_{B_1(0)} \rho\, \Delta u(x+\rho z)\, dz \leq 0$$

$$\Rightarrow \quad f(\rho) \leq \lim_{\rho \to 0^+} f(\rho)$$

$$= \lim_{\rho \to 0^+} \frac{1}{\alpha_n \rho^{n-1}} \int_{\partial B_\rho(x)} u(y)\, dS(y)$$

$$= \lim_{\rho \to 0^+} \frac{1}{\alpha_n \rho^{n-1}} \int_{\partial B_\rho(x)} (u(y) - u(x))\, dS(y)$$

$$+ \underbrace{\frac{1}{\alpha_n \rho^{n-1}} \int_{\partial B_\rho(x)} u(x)\, dS(y)}_{= u(x) \text{ da } \int_{\partial B_\rho(x)} 1\, dS(y) = \alpha_n \rho^{n-1}}$$

$$= \lim_{\rho \to 0^+} u(x) + \frac{1}{\alpha_n \rho^{n-1}} \int_{\partial B_\rho(x)} (u(y) - u(x))\, dS(y)$$

Nun

$$\left| \frac{1}{\alpha_n \rho^{n-1}} \int_{\partial B_\rho(x)} (u(y) - u(x))\, dS(y) \right|$$

$$\leq \frac{1}{\alpha_n \rho^{n-1}} \sup_{y \in \partial B_\rho(x)} |u(y) - u(x)| \cdot \mathrm{Vol}_{n-1}(\partial B_\rho(x))$$

$$= \sup_{y \in \partial B_\rho(x)} |u(y) - u(x)| \longrightarrow 0 \quad (\rho \to 0^+)$$

$$\Longrightarrow \quad f(\rho) \leq u(x) \quad \forall \rho > 0$$

$$\Longrightarrow \quad u(x) \geq \frac{1}{\alpha_n \rho^{n-1}} \int_{\partial B_\rho(x)} u(y)\, dS(y)$$

(ii)

$$\frac{1}{w_n r^n} \int_{B_r(x)} u(y)\, dy$$

$$= \frac{1}{w_n r^n} \int_0^r \int_{\partial B_\rho(x)} u(y)\, dS(y)\, d\rho$$

$$= \frac{1}{w_n r^n} \int_0^r \alpha_n \rho^{n-1} \underbrace{\left(\frac{1}{\alpha_n \rho^{n-1}} \int_{\partial B_\rho(x)} u(y)\, dS(y) \right)}_{\leq u(x)} d\rho$$

$$= \frac{1}{w_n r^n} \int_0^r \alpha_n \rho^{n-1}\, d\rho \qquad u(x)$$

$$= \frac{1}{w_n r^n} \frac{\alpha_n}{n} r^n = \frac{\alpha_n / n}{w_n} u(x)$$

Nun

$$w_n = \int_{B_1(0)} 1\, dx = \int_{B_1(0)} \frac{\operatorname{div}(x)}{n}\, dx$$

$$= \frac{1}{n} \int_{B_1(0)} \operatorname{div}(x)\, dx = \frac{1}{n} \int_{\partial B_1(0)} \langle x, \nu(x) \rangle\, dS(x)$$

$$= \frac{1}{n} \int_{\partial B_1(0)} \langle x, x \rangle \, dS(x) = \frac{1}{n} \int_{\partial B_1(0)} 1 \, dS(x) = \frac{1}{n} \alpha_n$$

(iii)

$r < r_0 \qquad u \in W^{1,2}(B_{r_0}(x)) \cap C(\overline{B_{r_0}(x)})$

<u>Dann</u>

$u * \varphi_\varepsilon \longrightarrow u \quad$ in $\quad W^{1,2}(B_{\frac{r+r_0}{2}}(x))$

$u * \varphi_\varepsilon \longrightarrow u \quad$ glm auf $\quad B_{\frac{r+r_0}{2}}(x)$

$\varepsilon < \frac{r_0 - r}{2}$. Sei $z \in B_{\frac{r+r_0}{2}}(x)$

$$-\Delta(u * \varphi_\varepsilon) = -\Delta \int_{B_{r_0}(x)} u(y)\, \varphi_\varepsilon(z-y)\, dy$$

$$= -\int_{B_{r_0}(x)} u(y)\, \Delta_z \varphi_\varepsilon(z-y)\, dy = -\int_{B_{r_0}(x)} u(y)\, \Delta_y \varphi_\varepsilon(z-y)\, dy$$

$$= \int_{B_{r_0}(x)} \nabla u(y)\, \nabla_y \varphi_\varepsilon(z-y) \geq 0$$

$$\Rightarrow \quad u * \varphi_\varepsilon(x) \geq \frac{1}{\omega_n r^n} \int_{B_r(x)} (u * \varphi_\varepsilon)(y)$$

$$\xRightarrow{\varepsilon \to 0} \quad u(x) \geq \frac{1}{\omega_n r^n} \int_{B_r(x)} u(y)\, dy$$

(iv)

$M := \{x \in \Omega \mid u(x) = m\}$

M relativ abgeschlossen da u stetig

M offen denn $x \in \Omega : u(x) = m$

$\Rightarrow \forall r_0 > 0 : \overline{B_{r_0}(x)} \subset \Omega :$

$$m = u(x) \geq \frac{1}{w_n r_0^n} \int_{B_{r_0}(x)} \underbrace{u(y)}_{\geq m} \, dy \quad \text{da } u(y) \geq m \text{ auf } \overline{\Omega}$$

$$\geq m \frac{1}{w_n r_0^n} \int_{B_{r_0}(x)} 1 \, dy = m$$

$\Rightarrow$ Alle Abschätzungen sind mit Gleichheit erfüllt

$\Rightarrow u(y) = m$ fü auf $B_{r_0}(x)$

$\overset{\text{Stetigkeit}}{\Longrightarrow} u(y) = m$ überall auf $B_{r_0}(x)$

(iii) $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi = \lambda \int_\Omega u \varphi + \int_\Omega g \varphi \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

$$\Rightarrow \int \nabla u \nabla \varphi = \int (\lambda u + g) \varphi$$

~~Fall $n=2$~~

„Hochdiskutieren" der Regularität

$$\int \nabla u \nabla \varphi = \int \underbrace{(\lambda u + g)}_{} \varphi$$

Bessere Integrabilität als 2
wegen Einbettung (ii)

Höherer $W^{2,p}$ Raum
wegen (i)

Noch bessere Integrabilität
wegen (ii)

Noch höherer $W^{2,p}$-Raum

usw.

Am Ende:
So hoher $W^{2,p}$ Raum,
dass stetig

Also konkret

$$\int \nabla u \nabla \varphi \, dx = \int (\lambda u + g) \varphi \, dx$$

Fall1 $n=2$ (ii): $(\lambda u + g) \in L^p(\Omega)$ $\forall p \in (1,\infty)$

$\xRightarrow{(i)}$ $u \in W^{2,p}(\Omega)$ $\forall p \in (1,\infty)$

Insbesondere $u \in W^{2,3}(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$ nach (ii)

$n \geq 3$ (ii) $\Rightarrow$ $(\lambda u + g) \in L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega)$

$\Rightarrow$ $u \in W^{2,\frac{2n}{n-2}}(\Omega)$

Nun, falls $\frac{2n}{n-2} > n$

$\Rightarrow$ $\frac{2}{n-2} > 1$

$\Rightarrow$ $n < 4$

Fall2 $n=3$ $\Rightarrow$ $n<4$ $\Rightarrow$ $u \in W^{2,\frac{2n}{n-2}}(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$

$n=4$ $\Rightarrow$ $u \in W^{2,4}(\Omega)$

$\Rightarrow$ $u \in L^p(\Omega)$ $\forall p \in (1,\infty)$

$\Rightarrow \lambda u + g \in L^p(\Omega)$ $\forall p \in (1,\infty)$ $\Rightarrow$ $u \in W^{2,p}(\Omega)$ $\forall p \in (1,\infty)$

$$\Longrightarrow u \in W^{2,5}(\Omega) \Longrightarrow u \in C(\bar{\Omega})$$

~~Fall 3~~ $n > 4$ (ii) $\Longrightarrow u \in W^{2,\frac{2n}{n-2}}(\Omega)$

$$\Longrightarrow u \in L^{?}(\Omega)$$

Wobei $? = \dfrac{n \cdot \frac{2n}{n-2}}{n - \frac{2n}{n-2}}$

$$= \frac{2n^2}{n(n-2)-2n} = \frac{2n}{n-4}$$

$$\Longrightarrow u \in L^{\frac{2n}{n-4}}(\Omega) \Longrightarrow \lambda u + g \in L^{\frac{2n}{n-4}}(\Omega)$$

$$\Longrightarrow u \in W^{2,\frac{2n}{n-4}}(\Omega)$$

$$\Longrightarrow u \in C(\bar{\Omega})$$

falls $\frac{2n}{n-4} > n$

$\Longleftrightarrow n < 6$

Fall 3 $n = 6 \Longrightarrow u \in W^{2,6}(\Omega)$

$\Longrightarrow u \in L^p(\Omega) \quad \forall p \in (1,\infty)$

$\Longrightarrow \lambda u + g \in L^p(\Omega) \quad \forall p \in (1,\infty)$

$$\Rightarrow u \in W^{2,p}(\Omega) \quad \forall p \in (1,7)$$

Insb. $u \in W^{2,7}(\Omega) \subset C(\bar{\Omega})$

<u>Fall 4</u> <u>$n > 6$</u> $u \in W^{2,\frac{2n}{n-4}}(\Omega)$

$$\Rightarrow u \in L^{?}(\Omega)$$

$$? = \frac{n \cdot \frac{2n}{n-4}}{n - \frac{2n}{n-4}} = \frac{2n}{n-6}$$

$$\Rightarrow (\lambda u + g) \in L^{\frac{2n}{n-6}}(\Omega)$$

$$\Rightarrow u \in W^{2,\frac{2n}{n-6}}(\Omega)$$

$$\Rightarrow u \in C(\bar{\Omega}) \text{ falls } n < 8$$

<u>Falls $n = 8$</u> $u \in W^{2,8}(\Omega)$

$$\Rightarrow u \in L^p(\Omega) \quad \forall p \in (1,\infty)$$

$$\Rightarrow (\lambda u + g) \in L^p(\Omega) \quad \forall p \in (1,\infty)$$

$$\Rightarrow u \in W^{2,p}(\Omega) \quad \forall p \in (1,\infty)$$

$$\Rightarrow u \in C(\bar{\Omega})$$

$\underline{n > 8}$ Weitermachen!

(iv)

$u \in W_0^{1,2}(\Omega)$, $g \in L^\infty(\Omega)$, $g \geq 0$, $u \in C(\bar\Omega)$

mit

$$\int_\Omega Du D\varphi = \lambda \int_\Omega u\varphi + \int_\Omega g\varphi \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

$$\Longrightarrow \int_\Omega Du D\varphi = \lambda \int_\Omega u\varphi + \int_\Omega g\varphi \quad \forall \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$$

<u>Beh</u> $u \geq 0$

<u>Bew</u> $\int Du D\varphi - \lambda \int u\varphi = \int g\varphi$

$\varphi = u^-$ Dann

$$Du D\varphi = Du Du^- = -|Du|^2 \chi_{u<0}$$

$$= -|Du^-|^2$$

$$u\varphi = u\varphi^- = -(u^-)^2$$

<u>Nun</u> $\underbrace{-\int |Du^-|^2 + \lambda \int (u^-)^2}_{\leq 0 \text{ da } \lambda < \lambda_1(\Omega)} = \int g u^- \geq 0$

$$\Longrightarrow \int |\nabla u^-|^2 - \lambda \int (u^-)^2 = 0$$

$$\xRightarrow{\lambda < \lambda_1(\Omega)} \quad u^- \equiv 0.$$

Nun $u \geq 0$, $u = 0$ auf $\partial\Omega$

da $0 \stackrel{u \in W_0^{1,2}(\Omega)}{=\!=} tr(u) \stackrel{u \in C(\overline{\Omega})}{=\!=} u|_{\partial\Omega}$

Dann A22a (iv)

$\Longrightarrow u(x) > 0 \quad \forall x \in \Omega$

oder $u \equiv 0$, [und das geht nur falls $g \equiv 0$]

(c) Sei $w \in W_0^{1,2}(\Omega)$

$$\int_\Omega Dw\, Du - \lambda \int_\Omega w u \geq 0 \quad \forall u \in C$$

z.z. $w \equiv 0$ oder $w > 0$ f.ü.

Schritt 1) $w \geq 0$ denn

$u = w^-$

$$-\int |Dw^-|^2 + \lambda \int (w^-)^2 \geq 0 \quad \lightning$$

zu $\lambda < \lambda_1(\Omega)$ falls $w^- \not\equiv 0$,

Schritt 2 Angenommen $\chi_{\{w=0\}} \not\equiv 0$ für

Beh $\exists\ u^* \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$: $u^* \geq 0$ auf Ω

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega): \int Du^* D\varphi = \lambda \int u^* \varphi + \int \chi_{\{w=0\}} \varphi$$

Bew (i) $\mathcal{E}: W_0^{1,2}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\mathcal{E}(u) := \frac{1}{2} \int |Du|^2 - \frac{\lambda}{2} \int u^2 - \int \chi_{\{w=0\}} u$$

hat einen Minimierer, da koerziv

und schwach unterhalbstetig $\Longrightarrow$ $\exists\, u^* \in W_0^{1,2}(\Omega)$
$\mathcal{E}(u^*) = \inf_{u \in W_0^{1,2}(\Omega)} \mathcal{E}(u)$

Euler
$\Longrightarrow \exists\, u^* \in W_0^{1,2}(\Omega)\ \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$

Lagrange

$$\int \nabla u^* \nabla \varphi = \lambda \int u^* \varphi + \int \chi_{\{w=0\}} \varphi$$

Aus A 22 b (iii) folgt $u^* \in C(\bar{\Omega})$
Aus A 22 b (iv) folgt $u^* > 0$ auf Ω

Nun

$$0 = \int_\Omega \chi_{\{w=0\}} w$$

$$= \int_\Omega \nabla u^* \nabla w - \lambda \int u^* w$$

Aber sei jetzt $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\Longrightarrow \exists\, C > 0 \quad \varphi + C u^* \geq 0$$

$$\varphi - C u^* \leq 0$$

$$\Rightarrow 0 \le \int Dw\, D(\varphi + C u^*) - \lambda \int w(\varphi + C u^*)$$

$$= \int Dw D\varphi - \lambda \int w\varphi + C\Big(\underbrace{\int Dw Du^* - \lambda w u^*}_{=0}\Big)$$

$$= \int Dw D\varphi - \lambda \int w \varphi$$

Analog

$$0 \ge \int Dw\, D(\varphi - C u^*) - \lambda \int w(\varphi - C u^*)$$

$$= \int Dw\, D\varphi - \lambda \int w \varphi$$

$$\Longrightarrow 0 = \int Dw D\varphi - \lambda \int w \varphi$$

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

$$\Rightarrow 0 = \int Dw D\varphi - \lambda \int w\varphi$$

$$\forall \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$$

$$\xrightarrow{\varphi = w} 0 = \int |Dw|^2 - \lambda \int w^2$$

$\Rightarrow w = 0$ fü ↯

(d) Reaktions-Diffusionsgleichung

$p \in (1, \frac{n+2}{n-2})$ falls $n \geq 3$

$\lambda < \lambda_1(\Omega)$

$p \in (1, \infty)$ falls $n = 2$

Satz 11 $\Rightarrow$ $\exists\, w \in W_0^{1,2}(\Omega)$ $w \geq 0$ $w \not\equiv 0$:

$\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\int \nabla w \nabla \varphi - \lambda \int w \varphi = \int |w|^{p-1} w \varphi$$

Daher $\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ $\varphi \geq 0$

$$\int_\Omega \nabla w \nabla \varphi - \lambda \int_\Omega w \varphi \geq 0$$

$\Longrightarrow$ $w \equiv 0$ oder $w > 0$ für in Ω