Universität Ulm

Abgabe: Donnerstag, 07.12.2017

Prof. Dr.Anna Dall'Acqua
Marius Müller
Wintersemester 2017/18
Punktzahl: keine

Übungen Variationsrechnung: Blatt 6

18. (Ein Supplement zum Mountain-Pass-Lemma in $\mathbb{R}^n$)

(a) Es sei $A \subset \mathbb{R}^n$ zusammenhängend. Dann ist $\overline{A} \subset \mathbb{R}^n$ zusammenhängend.

Es sei $\mathcal{E} \in C^1(\mathbb{R}^n)$ und koerziv, d.h $||x|| \to \infty$ impliziert, dass $\mathcal{E}(x) \to \infty$. Es seien $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ und definiere

$$\beta := \inf_{P \in \mathcal{P}} \sup_{x \in P} \mathcal{E}(x) \tag{1}$$

wobei $\mathcal{P} := \{P \subset \mathbb{R}^n | \text{P kompakt und zusammenhängend}, x_1, x_2 \in P\}$.

(b) Es seien $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$. Ein "Pfad" $P^* \in \mathcal{P}$ heißt **optimaler Mountain-Pass von** x_1 **nach** x_2 falls $\sup_{x \in P^*} \mathcal{E}(x) = \beta$. Zeige: Ist $\mathcal{E} \in C^1(\mathbb{R}^n)$ koerziv, so gibt es einen optimalen Mountain-Pass.

(c) Zeige: Auf die Koerzivität von $\mathcal{E}$ kann nicht verzeichtet werden. Das heißt finde $\mathcal{E} \in C^1(\mathbb{R}^n)$ und $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ derart, dass es keinen optimalen Mountain-Pass von x_1 nach x_2 gibt.

(d) Zeige: Wenn $m := \max\{\mathcal{E}(x_1), \mathcal{E}(x_2)\} < \beta$ gilt, so hat man für $\alpha \in (m, \beta)$ dass $N_\alpha := \{x \in \mathbb{R} | \ \mathcal{E}(x) \leq \alpha\}$ nicht zusammenhängend.

19. (Verbandsoperationen für Sobolevräume und Kegeltheorie)

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Seit dem ersten Maßtheorie-Kurs weiß man, dass sich jede Funktion $u \in L^2(\Omega)$ in $u = u^+ - u^-$ zerlegen lässt. In diesem Kurs haben wir gelernt, dass genau das für $W^{1,2}(\Omega)$ funktioniert. Eine natürliche Frage ist jetzt, ob und wie das auch für $W^{2,2}(\Omega)$ funktionieren kann.

(a) Betrachte $\Omega = (0,1)$. Zeige, dass es eine $W^{2,2}(\Omega)$-Funktion gibt, sodass $u^+ \notin W^{2,2}(\Omega)$

(b) Es sei H ein reeller Hilbertraum mit Skalarpordukt $(\cdot, \cdot)$. Wir nennen eine Teilmenge $C \subset H$ **Kegel** wenn für $u \in C$ und $\alpha \geq 0$ stets gilt, dass $\alpha u \in C$. Für einen Kegel $C \subset H$ definieren wir den sog. **dualen Kegel**:

$$C^* := \{w \in H : \forall v \in C \text{ gilt } (w, v) \leq 0\} \tag{2}$$

Zeige, dass es sich beim dualen Kegel tatsächlich wieder um einen Kegel handelt.

(c) Es sei H wie in (a) und $C \subset H$ ein konvexer, abgeschlossener, nichtleerer Kegel. Zeige, dass für $u \in H$ ein $u_1 \in C$ und ein $u_2 \in C^*$ existiert, sodass $u = u_1 + u_2$. Ferner gilt $(u_1, u_2) = 0$.

(d) Seien H, C wie in (b) und $u, v \in H$ so, dass $u = u_1 + u_2$, $v = v_1 + v_2$ für $u_1, v_1 \in C$, $u_2, v_2 \in C^*$ mit $(u_1, u_2) = (v_1, v_2) = 0$. Dann gilt

$$||u - v||^2 \geq ||u_1 - v_1||^2 + ||u_2 - v_2||^2 \tag{3}$$

Folgere, dass die Elemente u_1, u_2 aus (b) eindeutig bestimmt sind.

(e) Nun ist $C := \{u \in W^{2,2}(\Omega) \cap W_0^{1,2}(\Omega) | \ u \geq 0 \,\text{f.ü.}\}$ sicherlich ein Kegel. Verwende (oder beweise) dass $W_0^{1,2}(\Omega) \cap W^{2,2}(\Omega)$ mit $(u,v)_{W_0^{1,2}(\Omega) \cap W^{2,2}(\Omega)} := \int_\Omega \Delta u \Delta v dx$ ein Hilbertraum ist um zu zeigen, dass der Duale Kegel von C gegeben durch schwache Lösungen von

$$\begin{cases} -\Delta\Delta u \leq 0 & in\,\Omega \\ u \in W^{2,2}(\Omega) \cap W_0^{1,2}(\Omega) \end{cases} \tag{4}$$

gegeben ist.

Anmerkung: Wenn man nun irgendwie zeigen könnte, dass solche Lösungen nichtpositiv sind, könnte man doch jede $W^{2,2}-$Funktion als Summe einer nichtnegativen und einer nichtpositiven Funktion schreiben. Entpuppt sich aber als ein sehr schwieriges Problem in höherer Ordnung als 2. Für zweite Ordnung hilft das Maximumsprinzip, das wir in der nächsten Aufgabe zu genüge kennenlernen werden.

20. (Regularität und strikte Positivität von Lösungen der Reaktions-Diffusions-Gleichung)

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und C^1-glatt berandet $p \in (1, \infty)$ falls $n = 2$ oder $p \in (1, \frac{n+2}{n-2})$ falls $n \geq 3$. Sei dazu $\lambda_1 = \lambda_1(\Omega)$ gegeben durch

$$\inf \left\{ \frac{\int_\Omega |\nabla v|^2 dx}{\int_\Omega v^2 dx} \mid v \in W_0^{1,2}(\Omega), v \neq 0 \right\} > 0 \tag{5}$$

In der Vorlesung haben wir (Satz 1.1 in Kapitel 3) mit Variationsmethoden gezeigt, dass die Gleichung

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u + |u|^{p-1} u & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega \end{cases} \tag{6}$$

eine nichtnegative, nicht-Null Lösung besitzt, d.h. es gibt $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ mit $u \not\equiv 0$, $u \geq 0$ f.ü. derart dass für alle $\phi \in W_0^{1,2}(\Omega)$ gilt:

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \phi \, dx = \lambda \int_\Omega u\phi \, dx + \int_\Omega |u|^{p-1} u \phi \, dx \tag{7}$$

Da die Null-Lösung auch eine Lösung der Gleichung ist, besitzt die Gleichung also keine eindeutige Lösung. Nichteindeutigkeit macht es komplizierter, qualitative Eigenschaften von Lösungen zu zeigen. Wir wollen im Folgenden dennoch einige Methoden kennenlernen.

(a) Hier geht es um die Mittelwerteigenschaft und das strikte Maximumsprinzip für superharmonische Funktionen. Die Aufgabe lohnt sich nur, wenn die Aussage noch nicht bekannt ist und Interesse daran besteht. Das Maximumsprinzip werden wir aber benötigen. Falls du dich also entschließt, die Aufgabe zu überspringen, lies dir in jedem Fall die Aussage von (iv) durch.

(i) Es sei $x \in \mathbb{R}^n$ und $r_0 > 0$ sowie $u \in C^2(B_{r_0}(x)) \cap C(\overline{B_{r_0}(x)})$ derart , dass $-\Delta u \geq 0$. Definiere für $\rho < r_0$

$$f(\rho) := \frac{1}{\alpha_n \rho^{n-1}} \int_{\partial B_\rho(x)} u(y) dS(y) \tag{8}$$

wobei $\alpha_n = vol_{n-1}(\partial B_1(0))$ die Oberfläche der n-dimensionalen Einheitskugel sei. Zeige dass $f'(\rho) \leq 0$ und folgere daraus

$$u(x) \geq \frac{1}{\alpha_n \rho^{n-1}} \int_{\partial B_\rho(x)} u(y) dS(y) \quad \forall 0 < \rho < r_0 \tag{9}$$

(ii) Folgere aus (i), dass für $r_0 > r > 0$ und u, x wie oben stets gilt

$$u(x) \geq \frac{1}{\omega_n r^n} \int_{B_r(x)} u(y) dy \tag{10}$$

wobei $\omega_n = |B_1(0)|$ das n-dimensionale Volumen der n-dimensionalen Einheitskugel ist.

(iii) Es sei $u \in C(\overline{B_{r_0}(x)}) \cap W^{1,2}(B_{r_0}(x))$ schwach superharmonisch auf $B_r(x)$, das heißt

$$\int_{B_{r_0}(x)} \nabla u \nabla \phi \geq 0 \quad \forall \phi \in C_0^\infty(B_{r_0}(x)) : \phi \geq 0 \tag{11}$$

Zeige wiederum, dass für alle $0 < r < r_0$ gilt

$$u(x) \geq \frac{1}{\omega_n r^n} \int_{B_r(x)} u(y) dy \tag{12}$$

(iv) Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, zusammenhängend und beschränkt sowie $u \in C(\overline{\Omega}) \cap W^{1,2}(\Omega)$ schwach superharmonisch auf Ω, das heißt

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \phi dx \geq 0 \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega) : \phi \geq 0. \tag{13}$$

Sei dazu $m := \min_{x \in \overline{\Omega}} u(x)$. Dann gilt entweder $u \equiv m$ oder $u(x) > m$ für alle $x \in \Omega$.
Anmerkung: Das heißt, u sein Minimum auf $\overline{\Omega}$ am Rand (und zwar nur am Rand) annimmt. In Formelwerk schreibt man dann

$$\min_{x \in \overline{\Omega}} u(x) = \min_{x \in \partial\Omega} u(x) \tag{14}$$

(b) Im Folgenden wollen wir die Bootstrapping Methode diskutieren.

(i) Lies dir folgendes Resultat durch: (Es basiert auf einem Satz von Calderon-Zygmund, Gilbarg-Trudinger Lemma 9.17). Es sei $n \geq 2$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ zusammenhängend und beschränkt mit C^2-Rand und $p \in (1, \infty)$. Sei $f \in L^p(\Omega)$ und $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ eine schwache Lösung von $-\Delta u = f$, d.h für alle $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ gilt

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \phi dx = \int_\Omega f \phi dx. \tag{15}$$

Dann ist $u \in W^{2,p}(\Omega)$ und es gibt $C = C(p, \Omega)$ unabhängig von u und f derart, dass $||u||_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C(p, \Omega)||f||_{L^p(\Omega)}$

(ii) Lies auch folgendes Resultat: Es sei Ω wie oben und $p \in (1, \infty)$. Dann gilt: Falls $p < n$ so gilt $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ wobei q die Lösung der Gleichung $1 - \frac{n}{p} = -\frac{n}{q}$ ist. Falls $p > n$, so gilt $W^{1,p}(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$. Falls $p = n$ so gilt $u \in L^q(\Omega)$ für alle $q \in [1, \infty)$ (im Allgemeinen aber nicht $u \in L^\infty(\Omega)$)
Anmerkung: Den ersten Teil haben wir bereits in der Vorlesung benutzt und besprochen. Der zweite Teil fällt etwas schwerer zu glauben. Eine Rechtfertigung: Es lässt sich mit der Theorie, die wir entwickelt haben und mit dem Satz von Rademacher, zeigen, dass $W^{1,\infty}(\Omega) = Lip(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$.

(iii) Es sei nun $0 \leq \lambda < \lambda_1(\Omega)$ und $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$, $g \in L^\infty(\Omega)$ derart, dass

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \phi = \lambda \int_\Omega u\phi + \int_\Omega g\phi \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega) \tag{16}$$

Zeige, dass $u \in C(\overline{\Omega}) \cap W_0^{1,2}(\Omega)$.

(iv) Zeige: $g \geq 0$ f.ü. und $g \not\equiv 0$ f.ü. impliziert $u > 0$ in Ω.

(c) Sei nun $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und C^2-glatt berandet und $0 \leq \lambda < \lambda_1(\Omega)$. Setze $H = W_0^{1,2}(\Omega)$ und Definiere

$$C := \{u \in W_0^{1,2}(\Omega) : u \geq 0 \text{ f.ü.}\}. \tag{17}$$

Es sei nun $w \in W_0^{1,2}(\Omega)$ derart, dass für alle $u \in C$ gilt

$$\int_\Omega \nabla w \nabla u - \lambda \int wu \geq 0. \tag{18}$$

Zeige: Dann gilt entweder $w \equiv 0$ oder $w > 0$ f. ü. .

(d) Folgere, dass die in Kapitel 3 Satz 1.1 konstruierte Lösung von (6) strikt positiv ist.