Variationsrechnung Blatt 7

A22a $(\Omega, \mathcal{A})$ messbarer Raum

$\nu \ll \mu \;:\Longleftrightarrow\; (\mu(E) = 0 \Rightarrow \nu(E) = 0)$

$\nu(\Omega) < \infty$

z.z. $\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \; (\mu(E) < \delta \Rightarrow \nu(E) < \varepsilon)$

Bew Angenommen

$\exists \varepsilon_0 > 0 : \forall \delta > 0 \; \exists E_\delta \in \mathcal{A} : \mu(E_\delta) < \delta$ und

$\nu(E_\delta) \geq \varepsilon_0$

Dann sei

$$E := \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} E_{\frac{1}{2^k}} \in \mathcal{A}$$

Nun $\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} E_{\frac{1}{2^k}} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine Monoton Fallende

Mengenfolge und $\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_{\frac{1}{2^k}} \right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_{\frac{1}{2^k}})$

$$\leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \infty$$

$$\Longrightarrow \mu(E) = \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} E_{\frac{1}{2^k}} \right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \mu\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} E_{\frac{1}{2^k}}\right) \leq \limsup_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{\infty} \mu\left(E_{\frac{1}{2^k}}\right)$$

$$= \limsup_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 0 .$$

$$\Rightarrow \mu(E) = 0 \xRightarrow{\nu << \mu} \nu(E) = 0$$

Aber da $\nu(\Omega) < \infty$:

$$\nu(E) = \lim_{n\to\infty} \nu\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} E_{\frac{1}{2^k}}\right)$$

$$\geq \liminf_{n\to\infty} \nu\left(E_{\frac{1}{2^n}}\right) \geq \varepsilon_0$$

22 b) (Ω, A, μ) Maßraum $\mu(\Omega) < \infty$

$(f_k) \subset L^p(\Omega, A, \mu)$ $\quad f \in \mathcal{M}(\Omega, A, \mu)$

$f_k \longrightarrow f$ μ-f.ü.

Äquivalent

(1) $\int |f_k - f|^p \, d\mu \longrightarrow 0 \quad (k \to \infty)$

(2) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \mu(E) < \delta \Rightarrow \sup_{k \in \mathbb{N}} \int_E |f_k|^p d\mu < \varepsilon$.

Beweis

$(1) \Rightarrow (2)$

$(1) \Rightarrow f \in L^p(\Omega, A, \mu)$ (Minkowski-Ungleichung)

Sei $\varepsilon > 0$

$\Rightarrow \exists k_0 \in \mathbb{N} : k \geq k_0 \Rightarrow \int |f_k - f|^p < \left(\frac{\min(\varepsilon, 1)}{2}\right)^p$

Nun definiere für $k = 1 - k_0 - 1$

$\nu_k(E) = \int_E |f_k|^p d\mu \qquad \nu_0(E) := \int_E |f|^p d\mu$

Es gilt:

$\forall K = 0, \ldots, K_0 - 1$ ist ν_k absolutstetig bezüglich μ.

$\Rightarrow \forall K = 0, \ldots, k_0 - 1 \quad \exists \, \delta_k > 0 : \mu(E) < \delta_k$

$$\nu_K(E) < \left(\frac{\min(\varepsilon, 1)}{2}\right)^p$$

Wähle nun $\delta := \min(\delta_0, \ldots, \delta_{k_0-1})$ und erhalte

$\mu(E) < \delta$

$$\Rightarrow \left(\int_E |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}, \left(\int_E |f_1|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}, \ldots, \left(\int_E |f_{k_0-1}|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$< \left(\frac{\min(\varepsilon, 1)}{2}\right)^p$$

Nun sei $K \geq k_0$

$$\int_E |f_k|^p d\mu = \left(\left(\int_E |f_k|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\right)^p$$

$$\overset{\text{Minkowski}}{\leq} \left[\left(\int_E |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_E |f_k - f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\right]^p$$

$$< \left(\frac{\min(\varepsilon, 1)}{2} + \frac{\min(\varepsilon, 1)}{2}\right)^p = \min(\varepsilon, 1)^p < \varepsilon$$

Nun für $K < K_0$

$$\int |f_k|^p d\mu < \frac{\min(\varepsilon,1)^p}{2^p} < \min(\varepsilon,1)^p < \varepsilon$$

$$\Longrightarrow \sup_{k\in\mathbb{N}} \int_E |f_k|^p d\mu < \varepsilon$$

<u>(2) ⟹ (1)</u>

$$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0 : \mu(E) < \delta \Longrightarrow \sup_{k\in\mathbb{N}} \int_E |f_k|^p d\mu < \varepsilon$$

Dann: Beh

$$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0 : \mu(E) < \delta \Longrightarrow \int_E |f|^p d\mu < \varepsilon$$

<u>Begründung</u> Sei $\mu(E) < \delta$

$$\int_E |f|^p d\mu \overset{\text{Fatou}}{\leq} \liminf_{k\to\infty} \int |f_k|^p d\mu$$

$$\leq \sup_{k\in\mathbb{N}} \int |f_k|^p d\mu < \varepsilon$$

$\Longrightarrow \exists \delta_1 > 0:$

$$\left(\mu(E) < \delta_1 \Longrightarrow \sup_{k \in \mathbb{N}} \int_E |f_k|^p \, d\mu < \frac{\varepsilon}{2^{p+1}} \right)$$

$\exists \delta_2 > 0$

$$\left(\mu(E) < \delta_2 \Longrightarrow \int_E |f|^p \, d\mu < \frac{\varepsilon}{2^{p+1}} \right)$$

Satz von Egoroff / Jegorow

$\Longrightarrow \exists A \in \mathcal{A} : \mu(A) < \min(\delta_1, \delta_2)$ und

$f_k \longrightarrow f$ gleichmäßig auf $\Omega \setminus A$.

$$\Longrightarrow \limsup_{k \to \infty} \int_\Omega |f_k - f|^p \, d\mu$$

$$= \limsup_{k \to \infty} \left(\int_{\Omega \setminus A} |f_k - f|^p \, d\mu + \int_A |f_k - f|^p \, d\mu \right)$$

$$\leq \limsup_{k \to \infty} \left(\sup_{x \in \Omega \setminus A} |f_k(x) - f(x)|^p \, |\Omega \setminus A| + \int_A 2^p \max(|f_k|^p, |f|^p) \, d\mu \right)$$

$$\leq \limsup_{k \to \infty} \sup_{x \in \Omega \setminus A} |f_k(x) - f(x)|^p \, |\Omega \setminus A| + 2^p \left(\int_A |f_k|^p \, d\mu + \int_A |f|^p \, d\mu \right)$$

$$\leq 0 + 2^p \left(\frac{\varepsilon}{2^{p+1}} + \frac{\varepsilon}{2^{p+1}} \right) = \varepsilon .$$

$\varepsilon \to 0^+ \Rightarrow$ Beh.

$$\Rightarrow \int_\Omega |f_k - f|^p \, d\mu \longrightarrow 0 \quad (k \to \infty)$$

(c) Die Endlichkeit des Maßraumes wird nur bei (2) $\Rightarrow$ (1) in Form des Satzes von Egoroff benutzt.

Standardgegenbeispiel für Egoroff falls $\mu(\Omega) = \infty$: $\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$f_k(x) := \chi_{[k, k+1]}(x)$$

(f_k) erfüllt (2) : Wähle $\delta := \varepsilon$

Dann $\mu(E) < \delta$

$$\Rightarrow \int_E |f_k|^p \, d\mu \leq \int_E 1^p \, d\mu = \mu(E) < \delta = \varepsilon$$

Dazu $f_k \to 0$ pktw f.ü.

Aber

$f_k \longrightarrow 0$ pktw. jedoch

$f_k \not\longrightarrow 0$ in $L^p(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ denn

$$\int_{\mathbb{R}} |f_k - 0|^p \, d\mu = \int_{\mathbb{R}} |f_k|^p \, d\mu = \lambda([k, k+1]) = 1$$

$\not\xrightarrow[k]{} 0 \implies$ (1) gilt nicht.

(d)

(i) Z $\int_\Omega |g(x,u_k(x)) - g(x,u(x))|^{\frac{p+1}{p}} dx \longrightarrow 0 \quad (k \to \infty)$

$u_k \rightharpoonup u$ in $W_0^{1,2}(\Omega)$

$\Longrightarrow u_k \longrightarrow u$ in $L^{p+1}(\Omega)$

Wir zeigen:
Jede Teilfolge hat eine Teilfolge, die gegen 0 konvergiert. Die Behauptung folgt dann mit dem Haarspalter Lemma.

Sei (u_{k_l}) eine TF von u_k

Dann gibt es eine TF $(u_{k_{l_j}})$ die punktweise gegen u konvergiert

Wir wenden nun Vitali an um ZZ

$\int_\Omega |g(x,u_{k_{l_j}}(x)) - g(x,u(x))|^{\frac{p+1}{p}} dx \longrightarrow 0$

d.h $g(\cdot, u_{e_{k_j}}(\cdot)) \longrightarrow g(\cdot, u(\cdot))$ in

$L^{\frac{p+1}{p}}(\Omega)$

Dazu:

$$|g(x, u_{e_{k_j}}(x))|^{\frac{p+1}{p}} \leq \left(1 + |u_{e_{k_j}}|^p\right)^{\frac{p+1}{p}}$$

$$\leq 2^{\frac{p+1}{p}} \max\left(1^{\frac{p+1}{p}}, |u_{e_{k_j}}|^{p+1}\right)$$

$$\leq 2^{\frac{p+1}{p}} \left(1 + |u_{e_{k_j}}|^{p+1}\right)$$

$$\Longrightarrow \int_\Omega |g(x, u_{e_{k_j}}(x))|^{\frac{p+1}{p}} \leq 2^{\frac{p+1}{p}} \left(|\Omega| + \int_\Omega |u_{e_{k_j}}|^{p+1} dx\right)$$

$$< \infty \quad \forall j \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow g(\cdot, u_{e_{k_j}}(\cdot)) \in L^{\frac{p+1}{p}}(\Omega)$$

Nun $\int |u_{e_{k_j}} - u|^{p+1} dx \longrightarrow 0$ und $u_{e_{k_j}} \longrightarrow u$ f.ü.

$\overset{\text{Vitali}}{\Longrightarrow}$ $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \mu(E) < \delta \longrightarrow \sup_{j \in \mathbb{N}} \int_E |u_{e_{k_j}}|^{p+1} dx < \varepsilon$

Nun sei $\varepsilon > 0$

$$\Longrightarrow \exists \tilde{\delta} > 0 : \mu(E) < \tilde{\delta} \quad \sup_{j \in \mathbb{N}} \int_E |u_{\ell_{k_j}}|^{p+1} dx < \frac{\varepsilon}{2^{1+\frac{p+1}{p}}}$$

Wähle $\delta := \min\left\{\tilde{\delta}, \frac{\varepsilon}{2^{1+\frac{p+1}{p}}}\right\}$

Dann gilt für $E \in \mathcal{A}$: $\mu(E) < \delta$

$$\sup_{j \in \mathbb{N}} \int_E |g(x, u_{\ell_{k_j}}(x))|^{\frac{p+1}{p}} dx$$

$$\leq 2^{\frac{p+1}{p}} \left(|E| + \int_E |u_{\ell_{k_j}}|^{p+1} dx \right)$$

$$\leq 2^{\frac{p+1}{p}} \left(\frac{\varepsilon}{2^{1+\frac{p+1}{p}}} + \frac{\varepsilon}{2^{1+\frac{p+1}{p}}} \right) \leq \varepsilon$$

$\Longrightarrow \left(g(\cdot, u_{\ell_{k_j}}(\cdot))\right)_{j \in \mathbb{N}}$ erfüllt (ii) des Satzes von Vitali

$$\Longrightarrow \int |g(x, u_{e_{k_j}}(x)) - g(x, u(x))|^{\frac{p+1}{p}} dx \to 0$$

$\Longrightarrow$ Beh Mit Haeppalter lemma.

Nun

(ii)

$$\int |g(x, u_k(x)) u_k(x) - g(x, u(x)) u(x)| dx$$

$$\leq \int_\Omega |g(x, u_k(x)) - g(x, u(x))| |u_k(x)| dx$$

$$+ \int_\Omega |g(x, u(x))| |u_k(x) - u(x)| dx$$

$$\leq \underbrace{\left(\int_\Omega |g(x, u_k(x)) - g(x, u(x))|^{\frac{p+1}{p}} dx \right)^{\frac{p}{p+1}}}_{\to 0} \left(\int_\Omega |u_k(x)|^{p+1} dx \right)^{\frac{1}{p+1}}$$

$$+ \left(\int_\Omega |g(x, u(x))|^{\frac{p+1}{p}} dx \right)^{\frac{p}{p+1}} \underbrace{\left(\int_\Omega |u_k(x) - u(x)|^{p+1} \right)^{\frac{1}{p+1}}}_{\to 0}$$

Nun $\int |u_k(x)|^{p+1} dx$ beschrankt da

$u_k \to u$ in L^{p+1}

und

$$\left(\int_\Omega |g(x, u(x))|^{\frac{p+1}{p}} dx\right)^{\frac{p}{p+1}}$$

$$\leq \left(\int_\Omega \left(1 + |u(x)|^p\right)^{\frac{p+1}{p}} dx\right)^{\frac{p}{p+1}}$$

$$\leq 2^{\frac{p+1}{p}} \left(\int_\Omega \left(1 + |u(x)|^{p+1}\right) dx\right)^{\frac{p}{p+1}} < \infty$$

Nun

$$\left(\int_\Omega |g(x, u_k(x)) - g(x, u(x))|^{\frac{p+1}{p}} dx\right)^{\frac{p}{p+1}} \longrightarrow 0$$

und $\left(\int_\Omega |u_k(x) - u(x)|^{p+1}\right)^{\frac{1}{p+1}} \longrightarrow 0$

$$\Longrightarrow \int_\Omega |g(x, u_k(x))\, u_k(x) - g(x, u(x))\, u(x)|\, dx$$

$$\longrightarrow 0 \quad (k \to \infty)$$

Aufgabe 23

(a) Nein, sei $\dim H \geq 2$ und wähle

$x' \in H^* : x' \not\equiv 0$, Setze $\mathcal{E}(u) = x'(u)$

$\mathcal{E} : H \to \mathbb{R}$

$\mathcal{E}$ nicht koerziv, denn

$\exists z \in \ker \mathcal{E} \setminus \{0\}$ da $\dim H > \dim \mathbb{R} = 1$

Nun $\|nz\|_H \to \infty$ aber

$\mathcal{E}(nz) = 0 \not\to \infty$

Aber $\mathcal{E}$ erfüllt die Palais-Smale-Bedingung

denn

$D\mathcal{E}(u)(\varphi) = x'(\varphi) \quad \forall u \in H \ \forall \varphi \in H$

$\|D\mathcal{E}(u)\|_{H^*} = \|x'\|_{H^*} \neq 0$

$\Longrightarrow$ Es gibt keine Palais-Smale-Folgen.

[und damit besitzt jede Palais-Smale-Folge eine konvergente Teilfolge]

(b) $\mathcal{E}(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 + f(u)$, $\mathcal{E}$ Koerziv

$Df : H \to H^*$ kompakt, d.h.

$(u_n) \subset H$ beschränkt $\Rightarrow \left(Df(u_n)\right)_{n\in\mathbb{N}} \subset H^*$

hat eine konvergente Teilfolge,

<u>Beobachtung</u>

Riesz-Frechet $\Rightarrow \forall u \in H \;\exists\, \nabla f(u) \in H$:

$Df(u)(\varphi) = \langle \nabla f(u), \varphi \rangle$ und

$\|\nabla f(u)\|_H = \|Df(u)\|_{H^*}$

Damit : $\nabla f : H \to H$ ist auch kompakt

<u>Behauptung</u>

$$
\begin{aligned}
D\mathcal{E}(u)(\varphi) &= (u, \varphi) + Df(u)(\varphi) \\
&= (u, \varphi) + (\nabla f(u), \varphi) \\
&= (u + \nabla f(u), \varphi)
\end{aligned}
$$

<u>Beweis der Beh.</u> Es genügt z. $D\left(\frac{\|u\|^2}{2}\right)(\varphi) = (u, \varphi)$

<u>Bew</u> $\dfrac{\frac{1}{2}\|u+\varphi\|^2 - \frac{1}{2}\|u\|^2 - (u,\varphi)}{\|\varphi\|} = \dfrac{\frac{1}{2}\|\varphi\|^2}{\|\varphi\|} = \frac{1}{2}\|\varphi\| \to 0$

für $\|\varphi\| \to 0$

d.h. $\nabla \mathcal{E}(u) = u + \nabla f(u)$

Nun sei $(u_n) \subset H$ Palais-Smale-Folge

(u_n) beschränkt, da $\mathcal{E}$ koerziv.

$0 \leftarrow \|D\mathcal{E}(u_n)\|_{H^*} = \|\nabla \mathcal{E}(u_n)\|_H = \|u_n + \nabla f(u_n)\|_H$

Nun $\exists (u_{e_n})$ TF $\exists\, a \in H : \nabla f(u_{e_n}) \longrightarrow a$ da

∇f kompakt.

$\Rightarrow \|u_{e_n} - (-a)\|$

$\leq \|u_{e_n} - (-\nabla f(u_{e_n}))\|$

$+ \|-\nabla f(u_{e_n}) - (-a)\|$

$= \|u_{e_n} + \nabla f(u_{e_n})\| + \|\nabla f(u_{e_n}) - a\| \longrightarrow 0$

$(n \to \infty)$

$\Longrightarrow u_{e_n} \longrightarrow -a$ in H

$\Longrightarrow \mathcal{E}$ erfüllt die Palais Smale

Bedingung

(c) Wir zeigen $f : W_0^{1,2}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(u) = -\tilde{u}\left(\tfrac{1}{2}\right)^2$$

Erfüllt :

- $\mathcal{E}(u) = \frac{1}{2} \|u\|^2_{W_0^{1,2}} + f(u)$ koerziv
- $f \in C^1(W_0^{1,2}((0,1)) ; \mathbb{R})$
- $Df : W_0^{1,2}(0,1) \longrightarrow W_0^{1,2}(0,1)^*$

ist kompakt

Beweis

(1.) Differenzierbarkeit

→ Gateáux

$$\frac{d}{dt} - (\widetilde{u+t\varphi})^2\left(\tfrac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} -\left(\tilde{u} + t\tilde{\varphi}\right)^2\left(\tfrac{1}{2}\right)$$

$$= -2\, \tilde{u}\left(\tfrac{1}{2}\right) \tilde{\varphi}\left(\tfrac{1}{2}\right)$$

Fréchet

$$\lim_{\|\varphi\| \to 0} \frac{f(u+\varphi) - f(u) - 2\tilde{u}(\frac{1}{2})\tilde{\varphi}(\frac{1}{2})}{\|\varphi\|}$$

$$= \lim_{\|\varphi\| \to 0} \frac{\tilde{\varphi}(\frac{1}{2})^2}{\|\varphi\|}$$

$$= \lim_{\|\varphi\| \to 0} \frac{\left(\int_0^{1/2} \varphi'(s)\, ds\right)^2}{\|\varphi\|}$$

$$\leq \limsup_{\|\varphi\| \to 0} \frac{\frac{1}{2}\int_0^{1/2} \varphi'(s)^2\, ds}{\|\varphi\|}$$

$$\leq \limsup_{\|\varphi\| \to 0} \frac{\frac{1}{2}\|\varphi\|^2}{\|\varphi\|} = 0.$$

Wir zeigen nun

$\nabla f : W_0^{1,2}(0,1) \longrightarrow W_0^{1,2}(0,1)$ ist kompakt

sei $\varphi \in W_0^{1,2}(0,1)$

$$\int (\nabla f(u))' \varphi' \, dx = (\nabla f(u), \varphi)_{W_0^{1,2}}$$

$$= Df(u)(\varphi) = -2\tilde{u}\left(\tfrac{1}{2}\right)\tilde{\varphi}\left(\tfrac{1}{2}\right)$$

$$= -2\tilde{u}\left(\tfrac{1}{2}\right)\int_0^{1/2} \varphi'(s)\, ds$$

$$= \int_0^1 -2\tilde{u}\left(\tfrac{1}{2}\right)\chi_{[0,\frac{1}{2}]}(s)\, \varphi'(s)\, ds$$

$\overset{\text{2. HL der}}{\Longrightarrow}$ $\quad Df(u)'(s) = -2\tilde{u}\left(\tfrac{1}{2}\right)\chi_{[0,\frac{1}{2}]}(s) + C$

Variationsrechnung

$$\Rightarrow \quad Df(u)(s) = -2\int_0^s \tilde{u}\left(\tfrac{1}{2}\right)\chi_{[0,\frac{1}{2}]}(t)\, dt$$

$$+ Cs + D$$

Nun $\underset{D}{\underset{\shortparallel}{Df(u)(0)}} = 0 \quad \Rightarrow \quad D = 0$

Sei nun

$(u_n) \in W_0^{1,2}(\Omega)$ beschränkt

$\Rightarrow \exists (u_{l_n})$ TF $u_{l_n} \longrightarrow u$

Dann

$$\tilde{u}_{l_n}\left(\tfrac{1}{2}\right) = \int_0^{1/2} u_{l_n}'(s)\,ds$$

$$= \int_0^1 u_{l_n}'(s)\,\chi_{[0,\frac{1}{2}]}(s)\,ds$$

$$\longrightarrow \int_0^1 u'(s)\,\chi_{[0,\frac{1}{2}]}(s)\,ds$$

$$= \tilde{u}\left(\tfrac{1}{2}\right)$$

Nun

$$\nabla f(u_{l_n})' = \tilde{u}_{l_n}\left(\tfrac{1}{2}\right) - 2\,\tilde{u}_{l_n}\left(\tfrac{1}{2}\right)\chi_{[0,1/2]}$$

$$\longrightarrow \tilde{u}\left(\tfrac{1}{2}\right) - 2\,\tilde{u}\left(\tfrac{1}{2}\right)\chi_{[0,\frac{1}{2}]}$$

punktweise und sicherlich auch

in L^2 denn es gibt die

L^2-Majorante $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \left(|\tilde{u}_{l_n}(\tfrac{1}{2})| + 2\,|\chi_{[0,\frac{1}{2}]}|\,|\tilde{u}_{l_n}(\tfrac{1}{2})| \right)$

$\Longrightarrow$ ∇f ist kompakt

· $\mathcal{E}$ koerziv:

Angenommen $\exists\, (u_n) : \|u_n\|_{W_0^{1,2}} \longrightarrow \infty$

und $\mathcal{E}(u_n) \leq C$

Dann $\left\| \frac{u_n}{\|u_n\|} \right\| = 1$

$$\mathcal{E}\left(\frac{u_n}{\|u_n\|}\right) = \frac{\mathcal{E}(u_n)}{\|u_n\|^2} \longrightarrow 0$$

Nun

$\frac{u_n}{\|u_n\|} \rightharpoonup v$ in $W_0^{1,2}(0,1)$ für ein v

$\mathcal{E}(v) = 0$ da $\mathcal{E}$ schwach unterhalb-

stetig

Nun

$$0 = \frac{1}{2}\int_0^1 (v')^2\,dx - \tilde{v}\left(\tfrac{1}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 (v')^2\,dx - \left(\int_0^{\frac{1}{2}} v'(s)\,ds\right)^2$$

$$\overset{\text{CSU}}{\geq} \frac{1}{2}\int_0^1 (v')^2\,ds - \frac{1}{2}\int_0^{1/2} (v')^2\,ds$$

$$= \frac{1}{2}\int_{1/2}^1 (v')^2\,ds$$

$\Rightarrow v' \equiv 0$ auf $[\frac{1}{2}, 1]$

$\Rightarrow v(\frac{1}{2}) = v(1) = 0$

Da die Cauchy Schwarz Ungleichung mit Gleichheit gelten muss haben wir $v' = \text{const}$ auf $[0, \frac{1}{2}]$

$\Rightarrow \exists\, C, D \in \mathbb{R}:$

$$v(x) = Cx + D$$

$$0 = v(0) = D$$

$$0 = v(\tfrac{1}{2}) = C/2 + D \Rightarrow C = D = 0$$

$\Rightarrow v \equiv 0.$

Nun also $\frac{u_n}{\|u_n\|} \longrightarrow 0$ in $W_0^{1,2}(0,1)$

$\Rightarrow$ Da $W_0^{1,2}(0,1) \hookrightarrow C^0(0,1)$

kompakt gilt

aber $\frac{u_n}{\|u_n\|} \longrightarrow 0$ gleichmäßig

$$\Rightarrow 0 \leftarrow \frac{\tilde{u}_n\left(\frac{1}{2}\right)}{\|u_n\|_{W_0^{1,2}}} = \frac{\sqrt{-\mathcal{E}(u_n) + \frac{1}{2}\|u_n\|^2_{W_0^{1,2}}}}{\|u_n\|_{W_0^{1,2}}}$$

$$\xrightarrow{\|u_n\| \to \infty} \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \lightning$$

$\Rightarrow \mathcal{E}$ koerziv qed

A23d)

$K_\beta := \{u \in H \mid \mathcal{E}(u) = \beta, D\mathcal{E}(u) = 0\}$ [kompakt]

$U_{\beta,\varrho} = \bigcup_{u \in K_\beta} B_\varrho(u)$ Sei $U \supset K_\beta$ offen

Angenommen $\forall \varrho > 0$ $U_{\beta,\varrho} \not\subset U$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}\ \exists x_n \in U_{\beta,\frac{1}{n}} \setminus U$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}\ \exists y_n \in K_\beta : d(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$

Nun, da K_β kompakt

$\Rightarrow \exists$ TF $(y_{e_n})_{n \in \mathbb{N}}$ $y \in K_\beta$:

$y_{e_n} \longrightarrow y$. Dann aber $x_{e_n} \longrightarrow y$

d.h $\exists$ (x_{e_n}) TF $y \in K_\beta$: $x_{e_n} \longrightarrow y$

↯ zu $x_{e_n} \notin U$ $\forall n \in \mathbb{N}$, denn

U ist offene Umgebung von K_β

(e) $\mathcal{E} \in C^1(H, \mathbb{R})$ nach unten beschränkt

$$u \in C^1((0,\infty), H) \cap C^0([0,\infty), H)$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} u(t) = -\nabla \mathcal{E}(u(t)) \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

Z: $\exists\, t_n \to \infty$, $u \in H$: $D\mathcal{E}(u) = 0$ und

$$u(t_n) \to u \text{ in } H$$

Beweis: $\mathcal{E}(u_0) \in \mathbb{R}$

Nun

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}(u(t)) = D\mathcal{E}(u(t)) \left(\frac{d}{dt} u(t)\right)$$

$$= \left\langle \nabla \mathcal{E}(u(t)), \frac{d}{dt} u(t) \right\rangle$$

$$= \left\langle \nabla \mathcal{E}(u(t)), -\nabla \mathcal{E}(u(t)) \right\rangle$$

$$= -\|\nabla \mathcal{E}(u(t))\|^2$$

$$\Rightarrow \mathcal{E}(u(t)) \downarrow \bigcirc$$

$$\Rightarrow \mathcal{E}(u(t)) \geq \inf_{v \in H} \mathcal{E}(v) > -\infty$$

$$\xRightarrow[\text{in } \mathbb{R}]{\text{Monotone Folgen}} \exists \beta \in \mathbb{R} : \mathcal{E}(u(t)) \longrightarrow \beta \quad (t \to \infty)$$

Sei nun $n \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{E}(u(n+1)) - \mathcal{E}(u(n)) \xrightarrow{n \to \infty} \beta - \beta = 0$$

$$\|$$

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}(u(t)) \Big|_{t=\xi_n} (n+1-n) = -\| D\mathcal{E}(u(\xi_n)) \|^2$$

für ein $\xi_n \in (n, n+1)$

Nun

- $\mathcal{E}(u(\xi_n)) \longrightarrow \beta$
- $\| D\mathcal{E}(u(\xi_n)) \| \longrightarrow 0$

$\Rightarrow (u(\xi_n))_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine Palais Smale-Folge

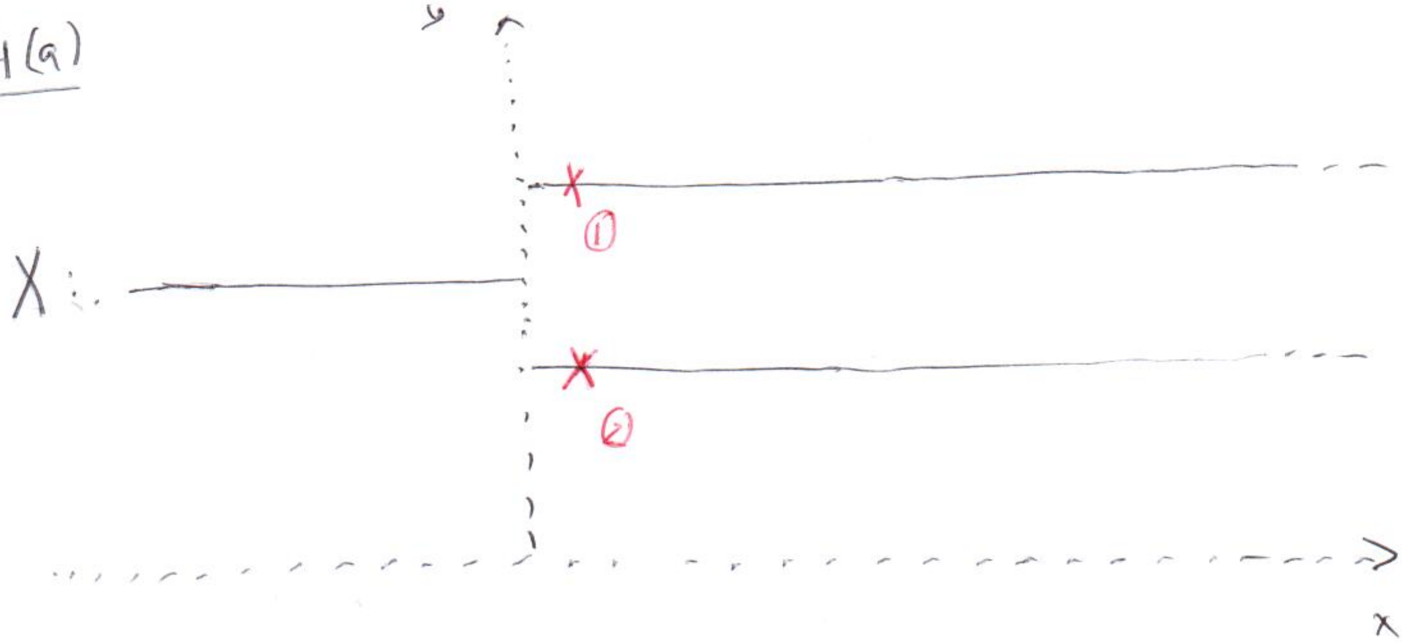
$\Longrightarrow \exists (\xi_{\ell_n})$ TF von (ξ_n), $u \in H$

$$u(\xi_{\ell_n}) \longrightarrow u$$

$$\nabla \mathcal{E}(u) \overset{\mathcal{E} \in C^1}{=} \lim_{n \to \infty}{}^{H} \nabla \mathcal{E}(u(\xi_{\ell_n})) = 0$$

$\Longrightarrow$ Bew.

24(a)



$U \subset X$ offen

$\iff U = (A \times \mathbb{R}) \cap X$ für ein $A \subset \mathbb{R}$ offen

Dann: Punkt ① und ② lassen sich nicht offen trennen

$\implies X$ nicht Hausdorff.

Seien nun aber $(U_i')_{i \in I}$ offen

$$X = \bigcup_{i \in I} U_i = \bigcup_{i \in I} (A_i \times \mathbb{R}) \cap X$$

Damit ist $\mathbb{R} = \bigcup_{i \in I} A_i$

Da $\mathbb{R}$ parakompakt, (siehe A24 (d))

hat $(A_i)_{i\in I}$ eine lokal endl. Verfeinerung

$(B_j)_{j\in J}$.

Dann

$$X = \bigcup_{j\in J} \underbrace{(B_j \times \mathbb{R}) \cap X}_{=: V_j}$$

Sei nun $x = (x_1, y_1) \in X$

Dann $\exists$ $A \subset \mathbb{R}$ offen $x_1 \in A$ und

x_1 nur in endlich vielen ~~_~~ B_j

$\Rightarrow (A \times \mathbb{R}) \cap X$ ist eine offene Umgebung,

die (x_1, y_1) enthält und

nur endlich viele V_j schneidet.

A24b)

$X = \mathbb{N}$

Topologie

$U \subset X$ offen $:\Leftrightarrow$ $1 \in U$ oder $U = \emptyset$

Nun: X nicht parakompakt.

$U_n = \{1, n\}$ offen

und

$$\bigcup_{n=1} U_n = X$$

Angenommen $\exists$ $(V_j)_{j \in J}$ lokalendliche Verfeinerung d.h. V_j offen und

$\forall j \in J \; \exists \; n \in \mathbb{N} : V_j \subset U_{n_j}$

Dann $\lightning$ da $1 \in V_j \; \forall j \in \mathbb{N}$ und

daher $\nexists$ $U \supset \{1\}$ offen $U \cap V_j = \emptyset$ für alle bis auf endlich viele j.

A25 d)

X Hausdorff ✓

Es sei $(O_j)_{j\in I}$ eine offene Überdeckung.

Beobachtungen

$$U_{i+1} \setminus K_{i-1} \text{ offen } \forall i \in \mathbb{N}$$

$$K_{i+1} \setminus U_{i-1} \supset U_{i+1} \setminus K_{i-1}$$

kompakt $\forall i \in \mathbb{N}$

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} U_{i+1} \setminus K_{i-1} = X \qquad (K_0 = \emptyset)$$

Nun

$$\forall i \in \mathbb{N} \; \exists \; j_1^{(i)}, — j_{N_i}^{(i)} :$$

$$K_{i+1} \setminus U_{i-1} \subset \bigcup_{k=1}^{N_i} O_{j_k^{(i)}}$$

Setze ~~für~~ $J := \{ (i,k) \mid k = 1 — N_i \}$

und $A_{i,k} := (U_{i+1} \setminus K_{i-1}) \cap O_{j_k^{(i)}}$

Dann ~~gilt~~ $\bigcup_{(i,k)\in J} A_{ik} = X$

Sei $x \in X$

$\Rightarrow \exists i \in \mathbb{N} : x \in U_{i+1} \setminus K_{i-1}$

Nun gilt $x \in A_{i,k}$ für ein

$(i,k) \in J$.

Jedoch $A_{i,k} \cap A_{j,l} = \emptyset$

falls $|i-j| > 3$

$\Longrightarrow$ A_{ik} schneidet höchstens

$N_{i-2} + N_{i-1} + N_i + N_{i+1} + N_{i+2} < \infty$

Mengen und ist offene

Umg von X ✓

Aufgabe 25 b

sei H ein $H\mathbb{R}$

$(x_n, y_n) \subset H \times H$: $\|x_n\| = 1$, $\|y_n\| = 1$

$$\left\|\frac{x_n + y_n}{2}\right\| \longrightarrow 1 \quad \overset{z}{\Rightarrow} \quad \|x_n - y_n\| \longrightarrow 0$$

Dann

$$1 \longleftarrow \left\|\frac{x_n + y_n}{2}\right\|^2$$

$$= \frac{1}{4}\left(\|x_n\|^2 + \|y_n\|^2 + 2(x_n, y_n)\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(2 + 2(x_n, y_n)\right)$$

$$\Rightarrow (x_n, y_n) \longrightarrow 1$$

$$\Rightarrow \|x_n - y_n\|^2 = \underbrace{\|x_n\|^2}_{=1} + \underbrace{\|y_n\|^2}_{=1} - 2\underbrace{(x_n, y_n)}_{\to 1}$$

$$\longrightarrow 0$$

(c) Angenommen $x_n \longrightarrow x$ und

$\|x_n\| \longrightarrow \|x\|$

Dann

Fall 1 $x = 0 \Longrightarrow \|x\| = 0$

Dann ist nichts zu zeigen

Fall 2 $x \neq 0$ Dann: Hahn Banach

$\Longrightarrow \exists x' \in X' : \|x'\| = 1 \ , \ x'(x) = \|x\|$

Nun $\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \|x_{n_0}\| > 0 \ \forall \ n \geq n_0$

Fur $n \geq n_0$ gilt

$$1 \geq \left\| \frac{\frac{x_n}{\|x_n\|} + \frac{x}{\|x\|}}{2} \right\| \geq x' \left(\frac{\frac{x_n}{\|x_n\|} + \frac{x}{\|x\|}}{2} \right)$$

$$= \frac{\frac{x'(x_n)}{\|x_n\|} + \frac{x'(x)}{\|x\|}}{2}$$

$$\longrightarrow \frac{x'(x)}{\|x\|} = x'\left(\frac{x}{\|x\|}\right) = 1$$

$$\Longrightarrow \quad \left\| \frac{\frac{x_n}{\|x_n\|} + \frac{x}{\|x\|}}{2} \right\| \longrightarrow 1$$

$$\xRightarrow{\text{glm. konvexität}} \quad \left\| \frac{x_n}{\|x_n\|} - \frac{x}{\|x\|} \right\| \longrightarrow 0$$

$$\xRightarrow[\|x\| \neq 0]{\|x_n\| \to \|x\|} \quad \|x_n - x\| \longrightarrow 0$$