Universität Ulm

Prof. Dr.Anna Dall'Acqua
Marius Müller

Abgabe: Donnerstag, 14.12.2017

Wintersemester 2017/18
Punktzahl: keine

Übungen Variationsrechnung: Blatt 7

21. (Weihnachtsfeier) ... Findet am 14.12.2017 um 16:00 Uhr im H9 statt. Bitte bringt eine Tasse mit :)

22. (Der Satz von Vitali und Anwendungen in der Vorlesung)

Im Folgenden bezeichne für einen Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ die Menge $\mathcal{M}(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ die Menge aller messbaren Funktionen mit Werten in $\mathbb{R}$. Sei ferner $1 \leq p \leq \infty$.

(a) Es sei $(\Omega, \mathcal{A})$ für diese Teilaufgabe ein messbarer Raum und μ, ν zwei Maße auf $(\Omega, \mathcal{A})$. Man nennt ν absolutstetig bezüglich μ falls für $E \in \mathcal{A}$ gilt: $\mu(E) = 0$ impliziert $\nu(E) = 0$. Sei nun μ absolutstetig bezüglich μ. Zeige (oder vergewissere dich, dass du weißt): Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ sodass für alle $E \in \mathcal{A}$ mit $\mu(E) < \delta$ gilt, dass $\nu(E) < \epsilon$.

(b) Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ nur für diese Teilaufgabe ein endlicher Maßraum und $(f_k) \subset L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ die μ fast-überall gegen $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ konvergiert . Zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

1.
$$\int_\Omega |f_k - f|^p d\mu \to 0 \quad (k \to \infty) \tag{1}$$

2.
$$\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \left(\mu(E) < \delta \; \Rightarrow \sup_{k \in \mathbb{N}} \int_E |f_k|^p d\mu < \epsilon \right) \tag{2}$$

Anmerkung: Zu Bedingung (2) sagt man, dass (f_k) gleichgradig p-absolutstetig ist.

Hinweis: Für (1) $\Rightarrow$ (2): Benutze zunächst (a) um zu sehen, dass es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt sodass $\int_E |f|^p dx < \epsilon$ wann immer $\mu(E) < \delta$. Für (2) $\Rightarrow$ (1) : Schlage nochmal in deinem Maßtheorie Skript nach (und schreib mir eine E-Mail wenn du wissen willst, welchen Satz du genau anwenden sollst)

(c) Falls man nur einen σ-endlichen Maßraum gegeben hat, gilt nur eine Implikation, die andere jedoch nicht. Finde heraus um welche es sich handelt und gebe ein Gegenbeispiel um zu zeigen, dass sie nicht gilt.

Hinweis (2) $\Rightarrow$ (1) klappt nicht. Zu dem Satz den du dabei mit großer Wahrscheinlichkeit anwenden wirst gibt es ein Standard-Gegenbeispiel wenn man auf die Endlichkeit des Maßraumes verzichtet. Wie sieht es damit aus?

(d) Im Folgenden wollen wir den Beweis vom Lemma innerhalb von Beispiel 3.4 und Beispiel 3.9 vervollständigen.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und C^1 glatt berandet und sei $(u_k) \subset W_0^{1,2}(\Omega)$ eine beschränkte Folge sowie $p \in (1, \infty)$ falls $n = 2$ oder $p \in (1, \frac{n+2}{n-2})$ falls $n \geq 3$. Es sei $g : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und genüge $g(x,t) \leq C(1 + |t|^p)$ für ein $C \geq 0$. Angenommen $u_k \rightharpoonup u$ in $W_0^{1,2}(\Omega)$. Zeige, dass dann gilt

$$\int_\Omega |g(x, u_k(x)) - g(x, u(x))|^{\frac{p+1}{p}} dx \to 0 \quad (k \to \infty) \tag{3}$$

Damit sollte das Beispiel 3.4 vervollständigt sein. Zur Vervollständigung von Beispiel 3.9 zeige

$$\int_\Omega |g(x, u_k(x))u_k(x) - g(x, u(x))u(x)| dx \to 0 \quad (k \to \infty) \tag{4}$$

(e) BONUS: Hier lernen wir eine Version des Satzes von Vitali kennen, die auch auf σ-endlichen Maßräumen funktioniert. Dazu zunächst folgende Definition: Eine Folge $(f_k) \subset L^p(\Omega, A, \mu)$ heißt $p-$gleichmäßig integrierbar, falls

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists w_\epsilon \in L^p(\Omega, A, \mu) : \sup_{k \in \mathbb{N}} \int_{|f_k| > |w_\epsilon|} |f_k|^p d\mu < \epsilon \tag{5}$$

Vergewissere dich, dass jede $p-$gleichmäßig integrierbare Funktionenfolge gleichgradig p-absolutstetig ist.

(f) BONUS: Beweise folgende Version des Satzes von Vitali: Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein σ-endlicher Maßraum. Es sei $(f_k) \subset L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ und $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ derart, dass $f_k \to f$ μ-fast überall. Dann sind äquivalent:

1. $$\lim_{k\to\infty} \int_\Omega |f_k - f|^p d\mu = 0 \tag{6}$$

2. (f_k) ist $p-$gleichmäßig integrierbar.

(g) BONUS: Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein σ-endlicher Maßraum und $(f_k) \subset \mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ eine in $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ beschränkte Folge, die punktweise fast überall gegen ein $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ konvergiert. Zeige: $f \in L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ und gilt

$$\lim_{k\to\infty} \int_\Omega |f_k|^p d\mu = \int_\Omega |f|^p d\mu \tag{7}$$

Dann konvergiert f_k gegen f in $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$.

23. (Die Palais-Smale Bedingung)

Es sei H ein Hilbertraum. Wir wollen hier Nutzen und Grenzen der Palais-Smale-Bedingung kennen lernen

(a) E s genüge $\mathcal{E} \in C^1(H, \mathbb{R})$ der Palais-Smale-Bedingung. Folgt, dass $\mathcal{E}$ koerziv ist ?

Hinweis: Nein: Sei $x' \in H^*$ mit $x' \neq 0$. Betrachte $\mathcal{E}(u) := x'(u)$.

(b) Angenommen es sei $\mathcal{E}(u) = \frac{1}{2}||u||^2 + f(u)$ für ein $f \in C^1(H; R)$. Zeige: $\mathcal{E}$ erfüllt die Palais-Smale-Bedingung wenn $Df : H \to H^*$ kompakt ist, d.h. für jede beschränkte Folge $(u_n) \subset H$ besitzt $Df(u_n)$ eine konvergente Teilfolge in H^*

Hinweis: Erinnere dich dass es $\nabla f : H \to H$ gibt, sodass $D\{(u)(\phi) = (\nabla f(u), \phi)$. Nutze das, um die Ableitung $D\mathcal{E}$ genauer zu charakterisieren.

(c) Sei $H = W_0^{1,2}(0,1)$ und $\mathcal{E}(u) := \frac{1}{2}\int_0^1 u'^2 dx - \widetilde{u}(\frac{1}{2})^2$, wobei $\widetilde{u}$ der stetige Repräsentant von u sei. Zeige: Dann erfüllt $\mathcal{E}$ die Palais-Smale-Bedinugung.

Hinweis: Verwende (b) und zeige, dass $f(u) := -\widetilde{u}(\frac{1}{2})^2$ kompakten Gradienten hat. Benutze den „HDI“ in einer Dimension, um den Gradienten genau zu bestimmen.

(d) Wir wollen hier Lemma 3.8 (iii) beweisen. Es genüge $\mathcal{E} \in C^1(H, \mathbb{R})$ einer Palais-Smale-Bedingung. Dazu sei für $\beta \in \mathbb{R}$

$$K_\beta := \{u \in H | \mathcal{E}(u) = \beta, D\mathcal{E}(u) = 0\}. \tag{8}$$

Definiere weiterhin für $\rho > 0$:

$$U_{\beta,\rho} := \bigcup_{u \in K_\beta} B_\rho(u) \tag{9}$$

Zeige: Zu jeder offenen Umgebung U von K_β gibt es ein $\rho > 0$ derart, dass $U_{\beta,\rho} \subset U$.

Anmerkung: In diesem Falle heißt die Familie $(U_{\beta,\rho})_{\rho>0}$ eine Umgebungsbasis.

In der folgenden Aufgabe wollen wir uns ansehen, wie sich Gradientenflüsse von Energien, die die Palais-Smale-Bedingung erfüllen, in großer Zeit verhalten

(e) Es genüge $\mathcal{E} \in C^1(H, \mathbb{R})$ der Palais-Smale Bedigung und sei nach unten beschränkt. Sei dazu $u_0 \in H$. Angenommen es gibt $u \in C^1((0,\infty), H) \cap C^0([0,\infty), H)$ derart, dass folgendes gilt:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}u(t) = -\nabla\mathcal{E}(u(t)) \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{10}$$

Zeige, dass es eine Folge $t_n \to \infty$ gibt und $u \in H$ mit $D\mathcal{E}(u) = 0$, sodass $u(t_n) \to u$ in H.

Hinweis: Weise nach, dass $t \mapsto \mathcal{E}(u(t))$ eine reellwertig monoton fallende nach unten beschränkte Funktion ist. Damit konvergiert sie für $t \to \infty$ gegen einen Grenzwert β. Betrachte die Ableitung der gegebenen Funktion und verwende Methoden der reellen Analysis um zu zeigen dass der gradient entlang einer Teilfolge gegen Null konvergieren muss.

24. (Parakompaktheit)

(a) Gebe ein Beispiel für einen topologischen Raum X, der nicht Hausdorff ist, bei dem aber jede offene Überdeckung eine lokalendliche Verfeinerung besitzt.

Hinweis: Statte die Menge $X = \{(x,0)|x < 0\} \cup \{(x,1)|x \geq 0\} \cup \{(x,-1)|x \geq 0\}$ mit der folgenden Topologie aus: Wir nennen $U \subset X$ offen falls es eine offene Teilmenge $A \subset \mathbb{R}$ gibt mit $U = (A \times \mathbb{R}) \cap X$.

(b) Gebe ein Beispiel für einen topologischen Raum, der eine offene Überdeckung hat, zu der keine lokalendliche Verfeinerungsüberdeckung existiert.

Hinweis: Statte die Menge $X = \mathbb{N}$ mit der folgenden Topologie aus: Wir nennen $U \subset \mathbb{X}$ offen, wenn U leer ist oder den Punkt 1 enthält.

(c) Vergewissere dich nocheinmal, dass du folgende drei Dinge weißt:

1. Es sei X ein topologischer Raum mit Topologie $\tau \subset \mathcal{P}(X)$. Wir nennen eine Menge offen, falls sie ein Element von τ ist und abgeschlossen, falls ihr Komplement ein Element von τ ist. Eine Menge heißt kompakt, wenn jede offene Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung besitzt.
2. Es sei X ein topologischer Raum, und $K \subset X$ kompakt. Dann ist jede abgeschlossene Teilmenge von K wiederum kompakt.
3. Es sei X sogar ein topologischer Hausdorff-Raum. Ist $K \subset X$ kompakt, so ist K abgeschlossen.

(d) Es sei X ein topologischer Hausdorffraum derart, dass eine aufsteigende Kette von Mengen

$$U_1 \subset K_1 \subset U_2 \subset K_2 \subset U_3 \subset K_3 \subset U_4 \subset K_4 \subset ... \tag{11}$$

existiert so, dass für alle $i \in \mathbb{N}$ die Mengen U_i offen ist und K_i kompakt ist. Zeige, dass X parakompakt ist. Folgere, dass topologische Mannigfaltigkeiten parakompakt sind.

Hinweis: Es kann hilfreich sein, dass $\bigcup_{i=1}^{\infty} U_{i+1} \setminus K_{i-1} = X$ (mit der Konvention $K_0 = \emptyset$) und $K_{i+1} \setminus U_{i-1}$ stets eine Kompakte Obermenge von $U_{i+1} \setminus K_{i-1}$ ist.

25. (Gleichmäßig konvexe normierte Räume)

Wir wollen hier ein ganz ähnliches Resultat wie in Aufgabe 22 (g) in einem allgemeineren Rahmen zeigen. Die Aussage gibt auch ein allgemeineres Framework für Schritt 4 in Beispiel 3.9.

(a) Lies folgende Definition: Ein normierter Raum X heißt gleichmäßig konvex falls es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt derart, dass $x, y \in \partial B_1(0)$ und $\left\| \frac{x+y}{2} \right\| > 1 - \delta$ impliziert, dass $||x - y|| < \epsilon$.

(b) Weise nach, dass Prähilberträume gleichmäßig konvex sind.

(c) Es sei nun X ein gleichmäßig konvexer normierter Raum und $(x_n), x \subset X$ eine Folge derart, dass $x_n \rightharpoonup x$ und $||x_n|| \to ||x||$. Zeige: Dann gilt $x_n \to x$ in X.

Hinweis: Falls $x = 0$ so ist nichts zu zeigen. Anderenfalls: Dank Hahn-Banach gibt es ein Funktional $x' \in X'$ mit $||x'|| = 1$ mit $x'(x) = ||x||$. Verwende dieses Funktional um zu zeigen dass $\left\| \frac{\frac{x_n}{||x_n||} + \frac{x}{||x||}}{2} \right\|$ gegen 1 konvergiert.