Cheat-Sheet

Der erste Dirichlet-eigenwert

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt, C^1-glatt berandet.

$$\lambda_1(\Omega) := \inf_{\substack{u \in W_0^{1,2}(\Omega) \\ u \not\equiv 0}} \frac{\int_\Omega |Du|^2 dx}{\int_\Omega u^2 dx}$$

$$= \inf_{\substack{u \in W_0^{1,2}(\Omega) \\ \|u\|_{L^2} = 1}} \int |Du|^2 dx$$

Optimale Poincare-Konstante:

$$\int u^2 dx \leq \frac{1}{\lambda_1(\Omega)} \int |Du|^2 dx$$

Satz 1 $\exists \; u \in W_0^{1,2}(\Omega)$:

$$\frac{\int |Du|^2 dx}{\int u^2 dx} = \lambda_1(\Omega)$$

Bew

Sei $(u_n) \subset W_0^{1,2}(\Omega)$ $\|u_n\|_{L^2(\Omega)} = 1$

und $\int |Du_n|^2 dx \longrightarrow \lambda_1(\Omega)$

Dann $\left(\int |Du_n|^2 dx \right)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt

und damit $(u_n) \subset W_0^{1,2}(\Omega)$ beschränkt,

$\Longrightarrow \exists$ TF (u_{ℓ_n}) : $u_{\ell_n} \rightharpoonup u$ in $W_0^{1,2}(\Omega)$

$\xRightarrow[\text{Kondrachow}]{\text{Rellich}}$ $u_{\ell_n} \longrightarrow u$ in $L^2(\Omega)$

$\Longrightarrow \|u\|_{L^2(\Omega)} = \lim_{n\to\infty} \|u_{\ell_n}\|_{L^2(\Omega)} = 1$

und

$$\int |Du|^2 dx = \|u\|^2_{W_0^{1,2}(\Omega)}$$

$$\underset{\text{d. Norm}}{\overset{\text{schw. Unstetigkeit}}{\leq}} \liminf_{n\to\infty} \int |Du_{\ell_n}|^2 dx$$

$\Longrightarrow \int |Du|^2 dx = \lambda_1(\Omega)$ und $\|u\|_{L^2(\Omega)} = 1$

Euler Lagrange Gleichung

Sei $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$: $\|u\|_{L^2(\Omega)} = 1$ und

$$\int |Du|^2 \, dx = \lambda_1(\Omega) \quad , \quad \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

$$\Rightarrow \quad 0 = \frac{d}{dt} \int_\Omega \left| D \frac{(u+t\varphi)}{\|u+t\varphi\|_{L^2}} \right|^2 dx$$

$$= \frac{d}{dt} \frac{1}{\|u+t\varphi\|_{L^2}^2} \int_\Omega |D(u+t\varphi)|^2 \, dx$$

$$= 2\left(\int Du \, D\varphi - \lambda_1(\Omega) \int u \varphi \, dx \right)$$

$\Rightarrow$ u ist schwache Lösung von

$$-\Delta u = \lambda_1(\Omega) \, u$$

Für welche λ hat

$-\Delta u = \lambda u$ eine

schwache Lösung in $W_0^{1,2}(\Omega)$?

Def

$$T : L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$$

$T(v)$ = schwache Lösung von $-\Delta u = v$

Beh

T wohl definiert, linear und

kompakt und selbst adjungiert

Bew

Wohl def. (i.e. Existenz einer schw. Lösung)

Sei $w \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Setze

$$A(w) := \int v w$$

$$A \in \mathcal{L}(W_0^{1,2}(\Omega); \mathbb{R})$$

$$\xRightarrow[\text{Frechet}]{\text{Riesz}} \exists !\, u \in W_0^{1,2}(\Omega)$$

$$\int_\Omega \nabla u \nabla w = \int v w \quad \forall w \in W_0^{1,2}(\Omega)$$

$\Longrightarrow$ u löst $-\Delta u = v$ schwach

Kompakt

$T = T_2 \circ T_1$

$T_1 : L^2(\Omega) \to W_0^{1,2}(\Omega)$

$T_1(v) =$ schwache Lösung von $-\Delta u = v$

$T_2 : W_0^{1,2}(\Omega) \to L^2(\Omega)$

$T(u) = u$ Einbettung

Beh T_1 stetig, T_2 kompakt
(Damit folgt sofort auch $T_2 \circ T_1$ kompakt)

Bew

$$\|T_1(v)\|^2_{W_0^{1,2}} = \int \nabla(T_1(v)) \, \nabla(T_1(v)) \, dx$$

$$= \int v \, T_1(v) \, dx$$

$$\leq \|v\|_{L^2} \|T_1(v)\|_{L^2} \leq C \|v\|_{L^2} \|T_1(v)\|_{W_0^{1,2}}$$

$$\Longrightarrow \|T_1(v)\|_{W_0^{1,2}} \leq C \|v\|_{L^2}$$

Selbstadjungiert

Seien $v, w \in L^2(\Omega)$

$$\int \underbrace{T(v)}_{\in W_0^{1,2}(\Omega)} w \, dx = \int \nabla T(v) \, \nabla T(w) \, dx$$

$$= \int v \, T(w) \, dx$$

$\Longrightarrow$ [Spektralsatz für kpkte selbstadj op]

$\exists (\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ $|\lambda_n| \downarrow 0, \lambda_n \neq 0$ $\exists v_n \in L^2(\Omega)$

$$T(v_n) = \lambda_n v_n$$

d.h. $\quad -\Delta(\lambda_n v_n) = v_n$

$$\Longrightarrow \quad -\Delta v_n = \frac{1}{\lambda_n} v_n$$

Damit ist $\lambda_1(\Omega)$ tatsächlich [das Reziproke eines] Eigenwertes eines Operators.

Positivität der Ersten Eigenfunktion

$$\frac{\int_\Omega |Du|^2 dx}{\int_\Omega u^2 dx} = \lambda_1(\Omega)$$

$\Longrightarrow$ $u \geq 0$ für oder $u \leq 0$ für.

Bew Angenommen $\|u^+\|_{L^2(\Omega)}, \|u^-\|_{L^2(\Omega)} > 0$

~~und~~

$$\frac{\int |Du^+|^2 dx}{\int (u^+)^2 dx} > \lambda_1(\Omega)$$

$\Longrightarrow$

$$\frac{\int |Du^-|^2 dx}{\int (u^-)^2 dx} > \lambda_1(\Omega)$$

denn die Lösung der E-L-Gleichung ist eindeutig

$$\Longrightarrow \quad \lambda_1(\Omega) = \frac{\int |\nabla u|^2 \, dx}{\int u^2 \, dx} = \frac{\int_{u>0} |\nabla u|^2 \, dx + \int_{u<0} |\nabla u|^2 \, dx}{\int_{u>0} u^2 \, dx + \int_{u<0} u^2 \, dx}$$

$$= \frac{\int |\nabla u^+|^2 \, dx + \int |\nabla u^-|^2 \, dx}{\int (u^+)^2 \, dx + \int (u^-)^2 \, dx}$$

$$> \frac{\lambda_1(\Omega) \left(\int (u^+)^2 \, dx \right) + \lambda_1(\Omega) \int (u^-)^2 \, dx}{\int (u^+)^2 \, dx + \int (u^-)^2 \, dx}$$

$$= \lambda_1(\Omega) \quad \lightning$$