

Variationsrechnung Blatt 8

H Hilbertraum, $\Sigma \in C^1(H; \mathbb{R})$ Palais-Smale und

1) $\Sigma(0) = 0$

2) $\exists \alpha > 0 \exists \rho > 0 \exists \theta \in \mathbb{R} : \begin{cases} \|u\|_H = \rho \Rightarrow \Sigma(u) \geq \alpha \\ \|u\|_H \leq \rho \Rightarrow \Sigma(u) \geq \theta \end{cases}$

Sei $\beta := \inf \{ \Sigma(u) \mid u \in \overline{B_\rho(0)} \} = \inf \{ \Sigma(u) \mid u \in B_\rho(0) \}$

Dann $-\infty < \beta \leq 0$.

Angenommen $K_\beta := \{ v \in H \mid \Sigma(v) = \beta, \|D\Sigma(v)\| = 0 \}$ hat
leeren Schnitt mit $B_\rho(0)$.

Da $\partial B_\rho(0) \cap K_\beta = \emptyset$ wegen (2) hat auch

K_β leeren Schnitt mit $\overline{B_\rho(0)}$.

Damit ist $N := H \setminus \overline{B_\rho(0)}$ eine offene Umgebung
von K_β .

Deformationslemma: Setze $\varepsilon_0 := -\beta + \frac{\alpha}{2}$

$\Rightarrow \exists \phi: \mathbb{R} \times H \rightarrow H$ lokaler ~~Pseudo~~ Pseudo-
Gradientenfluss, $\exists \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ mit

(i) ϕ stetig auf $\mathbb{R} \times H$

(ii) $t \mapsto \Sigma(\phi(t, u))$ monoton fallend $\forall u \in H$

(iii) $\phi(t, u) = u$ falls $|\Sigma(u) - \beta| \geq \varepsilon$.

(iv) $\phi(0, \cdot) = \text{id}(\cdot)$

(v) $\phi(I, E_{\beta+\varepsilon} \setminus N) \subset E_{\beta-\varepsilon}$

wobei
 $E_\theta := \{u \in H \mid \Sigma(u) < \theta\}$
 für $\theta \in \mathbb{R}$.

Behauptung $\phi(I, \underbrace{E_{\beta+\varepsilon} \cap B_\rho(0)}) \subset B_\rho(0)$
 $\neq \emptyset$ da β als
 Infimum konstruiert ist

~~Der~~ Beweis der Behauptung

Angenommen $\exists x \in E_{\beta+\varepsilon} \cap B_\rho(0)$ mit $\phi(I, x) \notin B_\rho(0)$

Beachte: $t \mapsto \phi(t, x)$ ist stetig.

Nun $\|\phi(0, x)\| = \|x\| < \rho$, $\|\phi(I, x)\| \geq \rho$.

Zwischenwertsatz
 $\Rightarrow \exists t_0 \in [0, 1] : \|\phi(t_0, x)\| = \rho$

$\Rightarrow \alpha \stackrel{(2)}{\leq} \Sigma(\phi(t_0, x)) \stackrel{(ii)}{\leq} \Sigma(\phi(0, x)) = \Sigma(x)$

$< \beta + \varepsilon \leq \beta + \varepsilon_0 = \beta + (-\beta + \frac{\alpha}{2}) = \frac{\alpha}{2} < \alpha$

Nun wähle $y \in B_\rho(0) \cap E_{\beta+\varepsilon}$. Dann $\phi(I, y) \in B_\rho(0) \cap E_{\beta-\varepsilon} = \emptyset$

da $\beta = \inf \{\Sigma(u) \mid u \in B_\rho(0)\} \Rightarrow K_\beta \neq \emptyset$
 K_β schneidet $B_\rho(0)$
 $\Rightarrow$ Beh.

Aufgabe 27

(b) Wähle $C > 0$ sodass $\|f(u)\| \leq C \forall u \in H$

Sei $u \in H$.

$$\Rightarrow \exists \rho(u) > 0 \exists L(u) > 0$$

$f|_{B_{\rho(u)}(u)}$ Lipschitz mit Konstante $L(u)$

Nun sei $v \in B_{\rho(u)}(u)$

Ist t so, dass

$$\begin{cases} \phi(s, v) \in B_{\rho(u)}(u) & \forall s : |s| \leq |t| \\ \phi(s, u) \in B_{\rho(u)}(u) & \forall s : |s| \leq |t| \end{cases}$$

so gilt

$$\|\phi(t, u) - \phi(t, v)\|$$

$$= \|u - v + \int_0^t \frac{d}{ds} (\phi(s, u) - \phi(s, v)) ds\|$$

$$= \|u - v + \int_0^t f(\phi(s, u)) - f(\phi(s, v)) ds\|$$

$$\leq \|u - v\| + \int_0^{|t|} \|f(\phi(s, u)) - f(\phi(s, v))\| ds$$

$$\leq \|u - v\| + L(u) \int_0^{|t|} \|\phi(s, u) - \phi(s, v)\| ds$$

$$\xRightarrow{\text{Gronwall}} \|\phi(t, u) - \phi(t, v)\| \leq \|u - v\| e^{L(u)|t|}$$

mit

n

Nun

$$\|\phi(t, v) - u\|$$

$$\leq \|\phi(t, v) - \phi(t, u)\| + \|\phi(t, u) - u\|$$

$$\leq \|u - v\| e^{L(u)|t|} + \int_0^{|t|} \|\dot{\phi}(s, u)\| ds$$

$$\leq \|u - v\| e^{L(u)t} + C|t|$$

$$\Rightarrow \phi(t, v) \in B_{g(u)}(u) \text{ falls}$$

$$\left. \begin{aligned} \|u - v\| e^{L(u)|t|} &< \frac{g(u)}{2} \\ \text{und } C|t| &< \frac{g(u)}{2} \end{aligned} \right\} (*)$$

d.h. falls

$$|t| < \min \left\{ \frac{g(u)}{2C}, \frac{1}{L(u)} \log \left(\frac{g(u)}{2\|u - v\|} \right) \right\}$$

Zwischenbehauptung

$$u_n \rightarrow u \text{ in } H \Rightarrow \phi(t, u_n) \rightarrow \phi(t, u) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Fall 1 $|t| < \frac{g(u)}{2C}$, O.B.d.A. $t \geq 0$ $\left[\begin{array}{l} \text{sonst} \\ \text{betr.} \\ \phi(\cdot, \cdot) \end{array} \right]$

$$\exists N \in \mathbb{N} : n \geq N \Rightarrow \|u_n - u\| < \frac{g(u)}{2C}$$

$$\text{und } \frac{1}{L(u)} \log \left(\frac{g(u)}{2\|u_n - u\|} \right) > \frac{g(u)}{2C}$$

Wegen (*) folgt $\phi(s, u_n) \in B_{g(u)}(u)$

$$\forall 0 \leq s \leq t$$

Daher:

$$\|\phi(t, u_n) - \phi(t, u)\| \leq \|u_n - u\| e^{L(u)t}$$

$$\longrightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

$$\Rightarrow \phi(t, u_n) \rightarrow \phi(t, u) \text{ in } H.$$

Fall 2 [Stoppzeitmethode]

Angenommen

$$t^* = \sup \{ t > 0 \mid \phi(t, u_n) \longrightarrow \phi(t, u) \} < \infty$$

$$\text{Sei } w := \phi(t^*, u)$$

Nun

$$\exists g(w) > 0 :$$

$$|t| < \frac{g(w)}{2C}, \quad w_n \longrightarrow w$$

$$\stackrel{(**)}{\implies} \phi(t, w_n) \longrightarrow \phi(t, w) [= \phi(t+t^*, u)]$$

Beachte, wegen Konstruktion von t^*

$$\exists \tilde{t} \in \left(t^* - \frac{g(w)}{4C}, t^* \right) :$$

$$\phi(\tilde{t}, u_n) \longrightarrow \phi(\tilde{t}, u) \text{ und}$$

$$\| \phi(\tilde{t}, u_n) - w \| < \frac{g(w)}{8}$$

Beachte :

$$\text{auf } B_{g(w)} = \{ \phi(\tilde{t}, u) - w \mid \phi(\tilde{t}, u) \in B_{g(w)}(w) \}$$

ist f Lipschitz mit Lipschitzkonstante

$L(w)$ d.h. wir können wählen:

$$\begin{aligned} g(\phi(\tilde{t}, u)) &\geq g(w) - \|\phi(\tilde{t}, u) - w\| \\ &\geq \frac{7}{8} g(w) \end{aligned}$$

und $L(\phi(\tilde{t}, u)) = L(w)$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow & \left\{ \begin{array}{l} |t| < \frac{7/8 g(w)}{2C} \Rightarrow z_n \rightarrow \phi(\tilde{t}, u) \\ \Rightarrow \phi(t, z_n) \rightarrow \phi(t, \phi(\tilde{t}, u)) = \phi(t + \tilde{t}, u) \end{array} \right. \end{aligned}$$

Setze $t_0 := \tilde{t} + \frac{g(w)}{4C} \rightarrow t^*$

$$\phi(t_0, u_n) = \phi\left(\tilde{t} + \frac{g(w)}{4C}, u_n\right)$$

$$= \phi\left(\frac{g(w)}{4C}, \underbrace{\phi(\tilde{t}, u_n)}_{= z_n}\right)$$

$$\xrightarrow{(***)} \phi\left(\frac{g(w)}{4C}, \phi(\tilde{t}, u)\right)$$

$$= \phi\left(\tilde{t} + \frac{g(w)}{4C}, u\right) = \phi(t_0, u) \quad \checkmark$$

Zur Wahl von t^*

$\Rightarrow t^* = \infty \Rightarrow$ Zwischenbehauptung

~~Nun sei~~ Analog: $\inf \{t \leq 0 \mid \phi(t, u_n) \rightarrow \phi(t, u)\} = -\infty$,

Beweis der Stetigkeit

Nun sei $t_n \xrightarrow{\text{in } \mathbb{R}} t, \quad u_n \xrightarrow{\text{in } U} u$

$$\|\phi(t_n, u_n) - \phi(t, u)\|$$

$$\leq \|\phi(t_n, u_n) - \phi(t, u_n)\|$$

$$+ \|\phi(t, u_n) - \phi(t, u)\|$$

$$\leq \left\| \int_{t_n}^t f(\phi(s, u_n)) ds \right\| + \underbrace{\|\phi(t, u_n) - \phi(t, u)\|}_{\rightarrow 0}$$

$$\leq C |t - t_n| + \|\phi(t, u_n) - \phi(t, u)\|$$

$$\rightarrow 0.$$

Aufgabe 28

Bei der Reaktions-Diffusionsgleichung handelt es sich um das (SEMLDP) aus Satz

4.7 mit $g(x,t) = \lambda t + |t|^{p-1}t$

Dann $g(x,t) = \frac{\lambda}{2} t^2 + \frac{1}{p+1} |t|^{p+1}$

(a) Bedingung 1 aus Satz 4.7:

Es gibt ein Subkritisches p sodass

$$|g(x,t)| \leq C(1+|t|^p) \quad \text{für ein } C > 0$$

→ Wurde benötigt für $\Sigma \in C^1(W_0^{1/2}(\Omega))$, siehe Bsp 3.4

HIER

$$|g(x,t)| = |\lambda t + |t|^{p-1}t|$$

$$\leq |\lambda| |t| + |t|^p$$

$$\leq \frac{p-1}{p} |\lambda|^{\frac{p}{p-1}} + \frac{1}{p} |t|^p + |t|^p$$

$$\leq C(1+|t|^p) \quad \text{für ein } C > 0 \quad \checkmark$$

$$\Rightarrow \Sigma \in C^1(W_0^{1/2}(\Omega))$$

(b) Bedingung 2 aus Satz 4.7

$$\exists r_0 > 0 \exists q > 2 :$$

$$0 < q g(x, t) \leq g(x, t) t \quad \forall |t| \geq r_0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

→ Wurde benötigt für : Σ ist Palais's-Summe, siehe Bsp 3.9

$$g(x, t) t = \lambda t^2 + |t|^{p+1}$$

$$\geq 2 \left(\frac{\lambda}{2} t^2 \right) + (p+1) \left(\frac{1}{p+1} |t|^{p+1} \right)$$

$$\geq (p+1) \left(\frac{1}{p+1} |t|^{p+1} \right)$$

$$\geq \frac{p+1+2}{2} \frac{1}{p+1} |t|^{p+1}$$

$$+ \frac{p+1-2}{2} \frac{1}{p+1} |t|^{p+1}$$

$$\stackrel{|t| \geq r_0}{\geq} \frac{p+1+2}{2} \left(\frac{1}{p+1} |t|^{p+1} + \frac{\lambda}{2} |t|^2 \right)$$

$$= \frac{p+1+2}{2} g(x, t) = q g(x, t)$$

denn

$$\frac{p+1-2}{2} \frac{1}{p+1} |t|^{p+1} > \frac{\lambda}{2} |t|^2$$

sofern

$$|t|^{p-1} > \frac{\lambda(p+1)}{p-1}$$

$$\text{ie } |t| > \left(\left| \frac{\lambda(p+1)}{(p-1)} \right| \right)^{\frac{1}{p-1}} =: r_0$$

Bedingung 3 aus Satz 4.7

$$\lim_{|t| \rightarrow 0} \frac{g(x,t)}{t} = 0$$

Benötigt für: Σ hat Mountain-Pass-Struktur,
siehe Schritt 1 in ~~Lemma~~ Satz 4.7

$$\lim_{|t| \rightarrow 0} \frac{g(x,t)}{t} = \lim_{|t| \rightarrow 0} \frac{\lambda t + |t|^{p-1} t}{t}$$

$$= \lim_{|t| \rightarrow 0} \lambda + |t|^{p-1} = \lambda \neq 0$$

sofern $\lambda \neq 0$

NICHT ERFÜLLT

(b) Wir zeigen:

Σ hat trotzdem Mountain-Pass-Struktur, d.h.
(nach Satz 4.6)

(i) $\Sigma(0) = 0$

(ii) $\exists \alpha > 0 \exists \rho > 0 : \|u\|_H = \rho \implies \Sigma(u) \geq \alpha > 0$

(iii) $\exists u_1 \in H : \|u_1\|_H > \rho \text{ und } \Sigma(u_1) < \alpha$

(i) Stimmt.

(ii)

$$\Sigma(u) = \frac{(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1})}{2} \int |\nabla u|^2 dx - \frac{1}{p+1} \int |u|^{p+1} dx$$

$$\geq \frac{(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1})}{2} \|\nabla u\|_{L^2}^2 - \frac{1}{p+1} C \|\nabla u\|_{L^2}^{p+1}$$

$$= \|\nabla u\|_{L^2}^2 \left(\left(\frac{1}{2} - \frac{\lambda}{2\lambda_1} \right) - \frac{1}{p+1} C \|\nabla u\|_{L^2}^{p-1} \right)$$

$$\text{Wähle } \rho := \left[\left(\frac{1}{4} - \frac{\lambda}{4\lambda_1} \right) \frac{p+1}{C} \right]^{\frac{1}{p-1}} > 0$$

$$\alpha := \rho^2 \left(\frac{1}{4} - \frac{\lambda}{4\lambda_1} \right)$$

$$\text{Nun } \|u\|_{W^{1,2}} = \beta \Rightarrow \|Du\|_{L^2} = \beta$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \Sigma(u) &\geq \int \left(\left(\frac{1}{2} - \frac{\lambda}{2\lambda_1} \right) - \frac{1}{p+1} C \beta^{p-1} \right) \\ &\geq \int \left(\left(\frac{1}{2} - \frac{\lambda}{2\lambda_1} \right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{\lambda}{4\lambda_1} \right) \right) \\ &= \int \left(\frac{1}{4} - \frac{\lambda}{4\lambda_1} \right) = \infty \end{aligned}$$

iii) Existenz von u_1

Wähle $u \neq 0$ beliebig und $t > 0$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \Sigma(tu) &= \frac{1}{2} \int |D(tu)|^2 dx \\ &\quad - \frac{\lambda}{2} \int (tu)^2 dx \\ &\quad - \frac{1}{p+1} \int (tu)^{p+1} dx \end{aligned}$$

$$= t^2 \left(\frac{1}{2} \int |Du|^2 dx - \frac{\lambda}{2} \int u^2 dx \right)$$

$$- \frac{t^{p+1} \int |u|^{p+1} dx}{> 0 \text{ da } u \neq 0}$$

$\longrightarrow -\infty$ wenn $t \rightarrow \infty$

A24

$$\mathcal{E}(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} u^2 dx - \frac{1}{p+1} \int_{\Omega} |u|^{p+1} dx$$

Es gilt

$$\mathcal{E} = \mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2 + \mathcal{F}_3$$

$$\mathcal{F}_i: W_0^{1,2}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\mathcal{F}_1(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx$$

Frechet diffbar!

$$\mathcal{F}_2(u) = -\frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} u^2 dx$$

Frechet diffbar!

$$\mathcal{F}_3(u) = -\frac{1}{p+1} \int_{\Omega} |u|^{p+1} dx$$

Frechet diffbar?

Beh $\mathcal{F}: W_0^{1,2}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$

$$\mathcal{F}(u) = \frac{1}{p+1} \int_{\Omega} |u|^{p+1} dx \text{ ist Frechet diffbar}$$

Kandidat für die Frechet-Ableitung

$$D\mathcal{F}(u): W_0^{1,2}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$D\mathcal{F}(u)(\varphi) = \int_{\Omega} |u|^{p-1} u \varphi dx$$

Sei nun $\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$ bel

$$|F(u+\varphi) - F(u) - DF(u)(\varphi)|$$

$$= \left| \int_{\Omega} \left(\frac{|u+\varphi|^{p^*+1}}{p^*+1} - \frac{|u|^{p^*}}{p^*+1} - |u|^{p^*-1} u \varphi \right) dx \right|$$

$$= \left| \int_{\Omega} \left(\int_0^1 \frac{d}{dt} \frac{|u+t\varphi|^{p^*+1}}{p^*+1} dt - |u|^{p^*-1} u \varphi \right) dx \right|$$

$$= \left| \int_{\Omega} \int_0^1 (|u+t\varphi|^{p^*-1} (u+t\varphi) \varphi - |u|^{p^*-1} u \varphi) dt dx \right|$$

$$\leq \int_{\Omega \times (0,1)} | |u+t\varphi|^{p^*-1} (u+t\varphi) - |u|^{p^*-1} u | |\varphi| dt dx$$

$$\stackrel{\text{"dieser"}}{\leq} \left(\int_{\Omega \times (0,1)} | |u+t\varphi|^{p^*-1} (u+t\varphi) - |u|^{p^*-1} u |^{\frac{p^*+1}{p^*}} dx \right)^{\frac{p^*}{p^*+1}} \left(\int_{\Omega \times (0,1)} |\varphi|^{\frac{p^*+1}{p^*}} dx \right)^{\frac{1}{p^*+1}}$$

$$\leq \|\varphi\| \left\{ \| |u+t\varphi|^{p^*-1} (u+t\varphi) - |u|^{p^*-1} u \|_{L^{\frac{p^*+1}{p^*}}(\Omega \times (0,1))} \right\}$$

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \int_E |u + t\varphi_k|^{p^*-1} (u + t\varphi_k) \Big|^{p^*+1} d(t|x)$$

$$= \sup_{k \in \mathbb{N}} \int_E |u + t\varphi_k|^{p^*+1} d(t|x)$$

$$\leq \sup_{k \in \mathbb{N}} \int_E |u| + |t|\varphi_k|^{p^*+1} d(t|x)$$

$$\leq \sup_{k \in \mathbb{N}} \int_E (|u| + |\varphi_k|)^{p^*+1} d(t|x)$$

$$\leq \sup_{k \in \mathbb{N}} \left[\left(\int_E |u|^{p^*+1} d(t|x) \right)^{\frac{1}{p^*+1}} + \left(\int_E |\varphi_k|^{p^*+1} d(t|x) \right)^{\frac{1}{p^*+1}} \right]^{p^*+1}$$

Now

$$\int_{\Omega \times (0,1)} |\varphi_k|^{p^*+1} d(t|x) \leq \int_{\Omega} |\varphi_k|^{p^*+1} dx$$

$$\leq S^{-\frac{(p^*+1)}{2}} \|\varphi_k\|_{W_0^{1,2}}^{p^*+1} \longrightarrow 0$$

$$\Rightarrow \varphi_k \longrightarrow 0 \text{ in } L^{p^*+1}(\Omega \times (0,1))$$

Vitali (andere Richtung)

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \lambda(E) < \delta$$

$$\Rightarrow \sup_{k \in \mathbb{N}} \int_E |\varphi_k|^{p^*+1} d(t|x) < \varepsilon$$

Da $u \in L^{p^*+1}(\mathbb{R} \times (c_1, 1))$ gilt auch

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \tilde{\delta} > 0 : \lambda(E) < \tilde{\delta}$$

$$\Rightarrow \int_E |u|^{p^*+1} d(t|x) < \varepsilon.$$

Sei $\varepsilon \in (c_1, 1)$ beliebig

$$\Rightarrow \exists \delta_1 > 0 : \lambda(E) < \delta_1 \Rightarrow \sup_{k \in \mathbb{N}} \int_E |\varphi_k|^{p^*+1} d(t|x) < \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{p^*+1}$$

$$\exists \delta_2 > 0 : \lambda(E) < \delta_2 \Rightarrow \int_E |u|^{p^*+1} d(t|x) < \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{p^*+1}$$

$$\Rightarrow \lambda(E) < \min(\delta_1, \delta_2)$$

$$\Rightarrow \sup_{k \in \mathbb{N}} \int_E |u + \delta \varphi_k|^{p^*+1} |u + \delta \varphi_k|^{\frac{p^*+1}{p}} dx$$

$$\leq \left[\left(\left(\frac{\varepsilon}{2} \right)^{p^*+1} \right)^{\frac{1}{p^*+1}} + \left(\left(\frac{\varepsilon}{2} \right)^{p^*+1} \right)^{\frac{1}{p^*+1}} \right]^{p^*+1}$$

$$= \varepsilon^{p^*+1} < \varepsilon$$

😊

30]

Wähle $\varepsilon := \frac{1}{2} \text{dist}(A, U^c)$

Dann $\eta: H \rightarrow \mathbb{R}$

$$\eta(x) := \max\left(0, 1 - \frac{\text{dist}(x, A)}{\varepsilon}\right)$$

tut's.

Bew

$\eta \equiv 1$ auf A da auf A gilt $\text{dist}(x, A) = 0$.

$\eta = 0$ auf U^c denn

$$x \in U^c \Rightarrow \text{dist}(x, A) \geq \text{dist}(U, A) = 2\varepsilon$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{\text{dist}(x, A)}{\varepsilon} \leq -1 < 0$$

$$\Rightarrow \eta(x) = 0$$

$$\underline{\underline{\eta \in C^{0,1}(H, \mathbb{R})}}$$

1) Das Maximum von Lipschitz-stetigen

Funktionen ist wieder Lipschitz,

siehe $\|A\|_1(a)$ auf Blatt 3

Beh $\text{dist}(\cdot, A)$ ist Lipschitz-stetig

Bew Seien $x, y \in H$ $(y_n) \subset A: \|y - y_n\|_H \rightarrow \text{dist}(y, A)$

$$\Rightarrow \text{dist}(x, A) - \text{dist}(y, A)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \text{dist}(x, A) - \|y - y_n\|$$

$$\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x - y_n\| - \|y - y_n\|$$

$$\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x - y + (y - y_n)\| - \|y - y_n\|$$

$$\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x - y\| + \|y - y_n\| - \|y - y_n\|$$

$$= \|x - y\|$$

$$\Rightarrow \text{dist}(x, A) - \text{dist}(y, A) \leq \|x - y\|$$

Analog

$$\text{dist}(y, A) - \text{dist}(x, A) \leq \|x - y\|$$

$$\Rightarrow |\text{dist}(x, A) - \text{dist}(y, A)| \leq \|x - y\|$$

$\Rightarrow \eta$ ist als Maximum Lipschitz-stetiger Fkt.
Lipschitz-stetig

30 b)

Sei H endlichdimensional

$\Rightarrow$ Es gibt einen symmetrischen

Isomorphismus von

H nach $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\text{standard}})$

Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen

$U \supset A$ offen

$$\forall x \in A \exists r_x > 0 : B_{r_x}(x) \subset U$$

$$\Rightarrow A \subset \bigcup_{x \in A} B_{r_x}(x) \subset U$$

$$\Rightarrow U = \bigcup_{x \in A} B_{r_x}(x) \cup U \setminus A$$

Zerlegung
der
Eins
Parakompakt
dass

$\exists (\psi_\alpha)_{\alpha \in A}$, ψ_α derart,

(i) $0 \leq \psi_\alpha \leq 1 \quad \forall \alpha \in A, 0 \leq \psi_\alpha \leq 1$

(ii) $\psi_\alpha \neq 0$ nur für abzählbar viele
Indizes α

(iii) $\forall x \in A \exists U(x) \subset U$ Umgebung von x :
 $\psi_\alpha \neq 0$ nur für endlich viele
 $\alpha \in A$.

$$(iv) \quad \psi_\alpha \in C_0^\infty(B_{r_\alpha}(\alpha))$$

$$\psi_{u \setminus A} \in C_0^\infty(u \setminus A)$$

(v)

$$\sum_{\alpha \in A} \psi_\alpha + \psi_{u \setminus A} = 1$$

Wähle $\eta = \sum_{\alpha \in A} \psi_\alpha$. η tut's!