Gronwall-Lemma:
Gegeben seien $J = [t_0, t_1)$ und $\alpha, \beta \in C(J, \mathbb{R})$.

(i) (Differentielle Form des Lemmas)
Erfüllt $\varphi \in C^1(J, \mathbb{R})$ die Ungleichung

$$\varphi'(t) \leq \alpha(t) + \beta(t)\varphi(t) \quad \forall t \in J, \tag{1}$$

so folgt für $t \in J$

$$\varphi(t) \leq \varphi(t_0)e^{\int_{t_0}^t \beta(\tau)d\tau} + \int_{t_0}^t \alpha(s)e^{\int_s^t \beta(\tau)d\tau}ds. \tag{2}$$

(ii) (Integralform des Lemmas)
Erfüllt $\varphi \in C(J, \mathbb{R})$ die Ungleichung

$$\varphi(t) \leq \alpha(t) + \int_{t_0}^t \beta(s)\varphi(s)ds \quad \forall t \in J \tag{3}$$

und $\beta \geq 0$ in J, so folgt für $t \in J$

$$\varphi(t) \leq \alpha(t) + \int_{t_0}^t \alpha(s)\beta(s)e^{\int_s^t \beta(\tau)d\tau}ds. \tag{4}$$

Bemerkung: Bezeichnet man die jeweils rechte Seite von (2) und (4) mit $\Psi(t)$, so löst Ψ im Fall (i) die Anfangswertaufgabe

$$\Psi' = \alpha + \beta\Psi, \quad \Psi(t_0) = \varphi(t_0)$$

und im Fall (ii) die Integralgleichung

$$\Psi(t) = \alpha(t) + \int_{t_0}^t \beta(s)\Psi(s)ds, \quad t \in J.$$

Eine Funktion φ, die einer Differential- bzw. Integralgleichung genügt, lässt sich also nach oben durch die Lösung der entsprechenden Gleichung abschätzen. Man beachte, dass $\beta \geq 0$ nur in (ii) vorausgesetzt wird.

Beweis. (i) Setze $\gamma(t) = e^{-\int_{t_0}^t \beta(\tau)d\tau}$ und finde

$$(\gamma\varphi)' = -\beta\gamma\varphi + \gamma\varphi' \leq -\beta\gamma\varphi + \gamma\alpha + \gamma\beta\varphi = \gamma\alpha,$$

also mit dem Hauptsatz und $\gamma(t_0) = 1$

$$\gamma(t)\varphi(t) \leq \varphi(t_0) + \int_{t_0}^t \alpha(s)\gamma(s)ds, \quad t \in J.$$

Multiplikation mit

$$\frac{1}{\gamma(t)} = e^{\int_{t_0}^t \beta(\tau)d\tau}$$

ergibt die Behauptung.
(ii) Für

$$v(t) := \int_{t_0}^{t} \beta(s)\varphi(s)ds$$

folgt aus (3) und $\beta \geq 0$

$$v'(t) = \beta(t)\varphi(t) \leq \beta(t)\alpha(t) + \beta(t)v(t).$$

Wegen $v(t_0) = 0$ liefert Teil (i)

$$v(t) \leq \int_{t_0}^{t} \alpha(s)\beta(s)e^{\int_s^t \beta(\tau)d\tau} ds.$$

Zusammen mit (3) erhält man dann (4). $\square$