



## Übungen Variationsrechnung: Blatt 7

### 26. (Ein Mountain-Pass-Lemma für lokale Minima in Tälern)

Es sei  $H$  ein reeller Hilbertraum und es sei  $\mathcal{E} \in C^1(H, \mathbb{R})$  die Palais-Smale-Bedingung erfüllend sowie nach unten beschränkt auf  $B_\rho(0)$ . Dazu genüge  $\mathcal{E}$  folgenden zwei Bedingungen

1.  $\mathcal{E}(0) = 0$
2. Es existieren  $\alpha > 0$  und  $\rho > 0$  sodass  $\|u\|_H = \rho \Rightarrow \mathcal{E}(u) \geq \alpha$

Zeige:  $\mathcal{E}$  nimmt ein lokales Minimum in  $B_\rho(0)$  an.

### 27. (Stetige Abhängigkeit vom Anfangswert)

Wir wollen in dieser Aufgabe Behauptung 1 des Deformationslemmas beweisen. Sei hierzu  $H$  ein reeller Hilbertraum.

- (a) Lies dir das Infoblatt zum Gronwall-Lemma auf der Vorlesungshomepage durch
- (b) Es sei  $f \in C(H, H)$  lokal Lipschitz-stetig und beschränkt in  $H$ . Wir haben bereits gesehen, dass es eine Abbildung  $\phi : \mathbb{R} \times H \rightarrow H$  gibt, sodass für jedes  $u \in H$  die Abbildung  $t \mapsto \phi(t, u)$  in  $C^1(\mathbb{R}, H)$  liegt und

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \phi(t, u) = f(\phi(t, u)) \\ \phi(0, u) = u \end{cases} \quad (1)$$

löst. Zeige, dass  $\phi \in C(\mathbb{R} \times H, H)$ .

### 28. (Die Reaktions-Diffusionsgleichung im subkritischen Fall mit dem Mountain-Pass-Lemma von Ambrosetti-Rabinowitz)

Es sei  $H = W_0^{1,2}(\Omega)$  für ein  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  beschränkt und  $C^1$ -glatt berandet,  $n \geq 2$  und  $p \in (1, \infty)$  falls  $n = 2$  und  $p \in (1, \frac{n+2}{n-2})$  falls  $p \geq 3$ . Wir betrachten die Reaktions-Diffusionsgleichung im subkritischen Fall, d.h.

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u + |u|^{p-1}u & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2)$$

mit  $\lambda < \lambda_1(\Omega)$  der erste Dirichleteigenwert. Definiere die Energie  $\mathcal{E} : W_0^{1,2}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$\mathcal{E}(u) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} u^2 dx - \frac{1}{p+1} \int_{\Omega} |u|^{p+1} dx \quad (3)$$

- (a) Folgere aus Beispiel 3.4, dass  $\mathcal{E}$  Fréchet differenzierbar ist und aus Beispiel 3.9, dass  $\mathcal{E}$  der Palais-Smale Bedingung genügt. Vergewissere dich, dass Satz 4.7 aber nicht immer anwendbar ist, weil Bedingung (iii) im Allgemeinen nicht erfüllt ist.
- (b) Zeige, dass es dennoch eine nichttriviale Lösung  $u \neq 0$  gibt

### 29. (Fréchet-Differenzierbarkeit im kritischen Fall) Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ wie in Satz 1.2 von Kapitel 4, $n \geq 3$ und $p^* = \frac{2n}{n-2}$ . Wir haben aus der Gültigkeit von Satz 1.2 gefolgert, dass das Energiefunktional $\mathcal{E} : W_0^{1,2}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\mathcal{E}(u) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} u^2 dx - \frac{1}{p^*+1} \int_{\Omega} |u|^{p^*+1} dx \quad (4)$$

für  $\lambda \leq 0$  die Palais-Smale-Bedingung nicht erfüllen kann. Hierbei haben wir aber nicht bewiesen, dass  $\mathcal{E} \in C^1(W_0^{1,2}(\Omega))$ . Vervollständige den Beweis, indem du die Fréchet-Differenzierbarkeit zeigst.

**30.** (Bump functions in Hilberträumen)

Im Beweis des Deformationslemmas haben wir die Existenz von sogenannten Bump functions benutzt. Im endlichdimensionalen folgt diese unmittelbar aus der Zerlegung der Eins. Auf allgemeinen Hilberträumen benötigen wir eine zusätzliche Voraussetzung, die wir hier kennenlernen wollen.

- (a) Es sei  $H$  ein Hilbertraum und  $A \subset H$  abgeschlossen sowie  $U \supset A$  offen. Zeige: Ist  $\text{dist}(A, U^C) > 0$  so gibt es  $\eta \in C^{0,1}(H; \mathbb{R})$  derart, dass  $\eta \equiv 1$  auf  $A$  und  $\eta \equiv 0$  auf  $U^C$ .
- (b) Ist  $H$  endlichdimensional, so kann auf die Bedingung  $\text{dist}(A, U^C)$  verzichtet werden