Universität Ulm

Abgabe: Donnerstag, 11.01.2017

Prof. Dr.Anna Dall'Acqua
Marius Müller
Wintersemester 2017/18
Punktzahl: keine

# Übungen Variationsrechnung: Blatt 7

**26.** (Ein Mountain-Pass-Lemma für lokale Minima in Tälern)

Es sei $H$ ein reeller Hilbertaum und es sei $\mathcal{E} \in C^1(H,\mathbb{R})$ die Palais-Smale-Bedingung erfüllend sowie nach unten beschränkt auf $B_\rho(0)$. Dazu genüge $\mathcal{E}$ folgenden zwei Bedingungen

1. $\mathcal{E}(0) = 0$
2. Es exstieren $\alpha > 0$ und $\rho > 0$ sodass $||u||_H = \rho \;\Rightarrow\; \mathcal{E}(u) \geq \alpha$

Zeige: $\mathcal{E}$ nimmt ein lokales Minimum in $B_\rho(0)$ an.

**Hinweis:** Setze $\beta := \inf_{u\in B_\rho(0)} \mathcal{E}(u) \leq 0$. Ist $K_\beta \cap B_\rho(0) \neq \emptyset$ sind wir fertig. Andernfalls konsturiere $\epsilon_0 > 0$ einen Fluss $\phi : \mathbb{R}\times H \to H$ sodass $\phi(1, E_{\beta+\epsilon} \cap B_\rho(0)) \subset E_{\beta-\epsilon} \cap B_\rho(0)$, wobei $\epsilon$ wie im Deformationslemma. Hierbei muss man mehr als nur eine Eigenschaft des Flusses benutzen!

**27.** (Stetige Abhängigkeit vom Anfangswert)

Wir wollen in dieser Aufgabe Behauptung 1 des Deformationslemmas beweisen. Sei hierzu $H$ ein reeller Hilbartraum.

(a) Lies dir das Infoblatt zum Gronwall-Lemma auf der Vorlesungshomepage durch

(b) Es sei $f \in C(H,H)$ lokal Lipschitz-stetig und beschänkt in $H$. Wir haben bereits gesehen, dass es eine Abbildung $\phi : \mathbb{R}\times H \to H$ gibt, sodass für jedes $u \in H$ die Abbildung $t \mapsto \phi(t,u)$ in $C^1(\mathbb{R},H)$ liegt und

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}\phi(t,u) = f(\phi(t,u)) \\ \phi(0,u) = u \end{cases} \tag{1}$$

löst. Zeige, dass $\phi \in C(\mathbb{R}\times H, H)$.

**Hinweis:** Versuche zunächst zu zeigen, dass $u_n \to u$ impliziert, dass $\phi(t,u_n) \to \phi(t,u)$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Es genügt, alles für $t \geq 0$ zu zeigen (warum?). Wähle zunächst $C > 0$ so, dass $||f(u)|| \leq C$ für alle $u \in H$. Fixiert man $u \in H$ so gibt es zunächst $\rho(u), L(u) > 0$ sodass $f$ auf $B_{\rho(u)}(u)$ Lipschitz-stetig mit Lipschitzkonstante $L(u)$ ist. Ist nun $v \in B_{\rho(u)}(u)$ und $t > 0$ so, dass $\phi(s,v), \phi(s,u) \in B_{\rho(u)}(u)$ für alle $0 \leq s \leq t$. Leite dann mit dem Gronwall-Lemma her, dass dann gilt

$$||\phi(t,u) - \phi(t,v)|| \leq ||u-v||e^{L(u)t} \tag{2}$$

Folgere mit der Dreiecksungleichung und dem Hauptsatz, dass

$$||\phi(t,v) - u|| \leq ||u-v||^{L(u)t} + Ct \tag{3}$$

und schließe, dass für jedes $0 < t < \min(\frac{1}{L(u)}\log\frac{\rho(u)}{2||u-v||}, \frac{\rho}{2C})$ gilt, dass $\phi(t,u), \phi(t,v) \in B_{\rho(u)}(u)$. Nutze deine Abschätzungen, um die im Hinweis am Anfang aufgestellte Behauptung für $t < \frac{\rho(u)}{2C}$ zu zeigen. Verwende die Flusseigenschaft, um dies auch für größere $t$ zu zeigen. Pass aber genau auf: $\rho$ hängt a priori vom Punkt ab, wo du dich befindest. EIne gute Stratgie ist dennoch, die Annahme $t^* := \sup\{t > 0 | \phi(t,u_n) \to \phi(t,u)\} < \infty$ zu einem Widerspruch zu führen.

**28.** (Die Reaktions-Diffusionsgleichung im subkritischen Fall mit dem Mountain-Pass-Lemma von Ambrosetti-Rabinowitz)

Es sei $H = W_0^{1,2}(\Omega)$ für ein $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und $C^1$-glatt berandet, $n \geq 2$ und $p \in (1,\infty)$ falls $n = 2$ und $p \in (1, \frac{n+2}{n-2})$ falls $p \geq 3$. Wir betrachten die Reaktions-Diffusiongleichung im subkritischen Fall, d.h.

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u + |u|^{p-1}u & in\ \Omega \\ \qquad u = 0 & auf\ \partial\Omega. \end{cases} \tag{4}$$

mit $\lambda < \lambda_1(\Omega)$ der erste Dirichleteigenwert. Definiere die Energie $\mathcal{E} : W_0^{1,2}(\Omega) \to \mathbb{R}$ durch

$$\mathcal{E}(u) := \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \frac{\lambda}{2}\int_\Omega u^2\, dx - \frac{1}{p+1}\int_\Omega |u|^{p+1}\, dx \tag{5}$$

(a) Folgere aus Beispiel 3.4, dass $\mathcal{E}$ Frechêt differenzierbar ist und aus Beispiel 3.9, dass $\mathcal{E}$ der Palais-Smale Bedingung genügt. Vergewissere dich, dass Satz 4.7 aber nicht immer anwendbar ist, weil Bedingung (iii) im Allgemeinen nicht erfüllt ist.

(b) Zeige, dass es dennoch eine nichttriviale Lösung $u \neq 0$ gibt

**29.** (Frechét-Differenzierbarkeit im kritischen Fall) Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ wie in Satz 1.2 von Kapitel 4, $n \geq 3$ und $p^* = \frac{2n}{n-2}$. Wir haben aus der Gültigkeit von Satz 1.2 gefolgert, dass das Energiefunktional $\mathcal{E} : W_0^{1,2}(\Omega) \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\mathcal{E}(u) := \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \frac{\lambda}{2}\int_\Omega u^2\, dx - \frac{1}{p^*+1}\int_\Omega |u|^{p^*+1}\, dx \tag{6}$$

für $\lambda \leq 0$ die Palais-Smale-Bedingung nicht erfüllen kann. Hierbei haben wir aber nicht bewiesen, dass $\mathcal{E} \in C^1(W_0^{1,2}(\Omega))$. Vervollständige den Beweis, indem du die Frechét-Differenzierbarkeit zeigst.

**30.** (Bump functions in Hilberträumen)

Im Beweis des Deformationslemmas haben wir die Existenz von sogenannten Bump functions benutzt. Im endlichdimensionalen folgt diese unmittelbar aus der Zerlegung der Eins. Auf allgemeinen Hilberträumen benötigen wir eine zusätzliche Vorraussetzung, die wir hier kennenlernen wollen.

(a) Es sei $H$ ein Hilbertraum und $A \subset H$ abgeschlossen sowie $U \supset A$ offen. Zeige: Ist $dist(A, U^C) > 0$ so gibt es $\eta \in C^{0,1}(H;\mathbb{R})$ derart, dass $\eta \equiv 1$ auf $A$ und $\eta \equiv 0$ auf $U^C$.

**Hinweis:** Falls $\epsilon = dist(A, U^C)$ betrachte $\eta(x) := \max(0, 1 - \frac{2dist(x,A)}{\epsilon})$.

(b) Ist $H$ endlichdimensional, so kann auf die Bediungung $dist(A, U^C) > 0$ verzichtet werden.