



## Übungen Variationsrechnung: Blatt 9

31. (Eine Pohozaev-Identität für eine Reaktions-Diffusions-Gleichung höherer Ordnung) Im Folgenden sei  $n > 4$  und  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein  $C^{4,\alpha}$ -glatt berandetes Gebiet für ein  $\alpha > 0$ . Wir betrachten klassische Lösungen der Gleichung

$$\begin{cases} \Delta^2 u = \lambda u + |u|^{q-1}u & \text{in } \Omega \\ u = \frac{du}{d\nu} = 0 & \text{auf } \partial\Omega \end{cases} \quad (1)$$

wobei  $q = \frac{n+4}{n-4}$ . Für diese Aufgabe verlangen wir, dass  $u \in C^4(\overline{\Omega})$ . Man kann aber zeigen, dass aufgrund der Glattheit des Randes des Gebiets, jede schwache Lösung  $u \in W_0^{2,2}(\Omega)$  bereits  $C^4(\overline{\Omega})$  sein muss. Unser Ziel ist der Beweis einer Pohozaev Identität, genauer wollen wir zeigen, dass

$$4\lambda \int_{\Omega} u^2 dx = \int_{\partial\Omega} (\Delta u)^2 (x \cdot \nu) dS. \quad (2)$$

- (a) Es sei  $v \in C^1(\overline{\Omega})$ . Zeige, dass

$$\int_{\Omega} v(x \cdot \nabla v) dx = \int_{\partial\Omega} \frac{1}{2} \langle x, \nu \rangle v^2 dx - \frac{n}{2} \int_{\Omega} v^2 dx \quad (3)$$

- (b) (i) Es sei  $u \in C^1(\overline{\Omega})$  derart, dass  $u = 0$  auf  $\partial\Omega$ . Zeige:

$$\nabla u(x) = \nu(x) \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) \quad \forall x \in \partial\Omega. \quad (4)$$

- (ii) Es sei  $u \in C^2(\overline{\Omega})$  derart, dass  $u = \frac{du}{d\nu} = 0$ .

$$\Delta u(x) = \frac{\partial^2 u}{\partial \nu^2}(x) \quad \forall x \in \partial\Omega \quad (5)$$

- (c) Es sei  $u \in C^4(\overline{\Omega})$  derart, dass  $u = \frac{\partial u}{\partial \mu} = 0$  Dann gilt

$$\int_{\Omega} \Delta^2 u (x \cdot \nabla u) dx = - \int_{\Omega} \nabla(\Delta u) \cdot \nabla(x \cdot \nabla u) dx \quad (6)$$

und

$$\int_{\Omega} \Delta^2 u (x \cdot \nabla u) dx = \int_{\Omega} (\Delta u)^2 - \sum_{k,i=1}^n \int_{\Omega} x_i (\Delta u)_{x_k} u_{x_i x_k} dx \quad (7)$$

- (d) Sei  $u$  wie in Teilaufgabe (c). Zeige von von Teilaufgabe (c) ausgehend, dass

$$\sum_{k,i=1}^n \int_{\Omega} x_i (\Delta u)_{x_k} u_{x_i x_k} dx = \int_{\partial\Omega} (\Delta u)^2 \langle x, \nu \rangle dS - \int_{\Omega} (\Delta u)^2 - \int_{\Omega} \Delta u (x \cdot \nabla \Delta u) dx \quad (8)$$

- (e) Zeige schließlich, dass für  $u$  wie in (c)

$$\sum_{k,i=1}^n \int_{\Omega} x_i (\Delta u)_{x_k} u_{x_i x_k} dx = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} (\Delta u)^2 \langle x, \nu \rangle dS + \frac{n-2}{2} \int_{\Omega} (\Delta u)^2 dx \quad (9)$$

- (f) Folgere schlussendlich, dass für  $u$  wie in (c),

$$\int_{\Omega} \Delta^2 u (x \cdot \nabla u) dx = \frac{4-n}{2} \int_{\Omega} (\Delta u)^2 dx - \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} (\Delta u)^2 \langle x, \nu \rangle dS \quad (10)$$

(g) Vergewissere dich mit deinem Vorlesungsskript (Prop. 1.1 in §4.1.1), dass

$$\lambda \int_{\Omega} u(x \cdot \nabla u) dx = -\frac{\lambda n}{2} \int_{\Omega} u^2 dx \quad (11)$$

und

$$\int_{\Omega} |u|^{q-1} u(x \cdot \nabla u) = -\frac{n}{q+1} \int_{\Omega} |u|^{q+1} dx \quad (12)$$

(h) Setze die Erkenntnisse aus (f) und (g) zusammen und erhalte

$$\frac{4-n}{2} \int_{\Omega} (\Delta u)^2 dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\Delta u)^2 (x \cdot \nu) dS = -\frac{\lambda n}{2} \int_{\Omega} u^2 dx - \frac{n}{q+1} \int_{\Omega} |u|^{q+1} dx \quad (13)$$

(i) Verfahre wie im Beweis von Proposition 1.1 in §4.1.1 um die Pohozaev Identität in Gleichung (2) zu zeigen.

(j) Folgere: Es sei  $\Omega$  zusätzlich strikt sternförmig, d.h.  $x \cdot \nu > 0$  für alle  $x \in \partial\Omega$ . Zeige: Für  $\lambda < 0$  besitzt (1) keine nichttriviale Lösung in  $C^4(\bar{\Omega})$  (und damit auch keine schwache Lösung in  $W_0^{2,2}(\Omega)$ ).

**32.** (Kritische Punkte kommen der Null nicht beliebig nahe)

Es sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ,  $p^*$  der kritische Exponent,  $\lambda < \lambda_1(\Omega)$ ,  $S$  die optimale Sobolev-Konstante aus Satz 1.3 und  $\mathcal{E} : W_0^{1,2}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch

$$\mathcal{E}(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} u^2 dx - \frac{1}{p+1} \int_{\Omega} |u|^{p+1} \quad (14)$$

(a) Zeige: Jeder nichttriviale kritische Punkt  $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$  erfüllt

$$\int_{\Omega} |u|^{p^*+1} dx \geq \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}\right)^{\frac{n}{2}} S^{\frac{n}{2}} \quad (15)$$

(b) Folgere, dass

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \geq \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1(\Omega)}\right)^{\frac{n-2}{2n}} S^{\frac{n}{2}} \quad (16)$$

(c) Es sei nun  $n \geq 4$  und  $\lambda > 0$  oder  $n = 3$  und  $\lambda > \tilde{\lambda}(\Omega)$  aus Lemma 1.5. Es sei dazu  $u$  ein nichttriviale kritischer Punkt vom Mountain-Pass-Typ konstruiert wie in Lemma 1.4. Zeige:

$$\int_{\Omega} |u|^{p^*+1} dx \geq \frac{2n}{n-2} \left[ \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}\right)^{\frac{n}{2}} - \frac{1}{n} \right] S^{\frac{n}{2}} \quad (17)$$

und folgere aus dieser Abschätzung eine neue Abschätzung für

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx. \quad (18)$$

Könntest du hier einen Iterationsprozess starten, um die Ungleichungen noch schärfer zu machen?