

Lösungen Aufgabe (2) (c) bis (e)

(c) Sei u ein $C^2(x_1, x_2)$ -Minimierer und $\varphi \in C_0^\infty(x_1, x_2)$

$$0 = \frac{d}{dt} \mathcal{E}(u + t\varphi) \Big|_{t=0}$$

$$= \frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1+(u'(x)+t\varphi'(x))^2}}{u(x)+t\varphi(x)} dx$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} \left\{ -\frac{1}{2(u(x)+t\varphi(x))^{3/2}} \sqrt{1+(u'(x)+t\varphi'(x))^2} \varphi(x) + \frac{(u'(x)+t\varphi'(x))\varphi'(x)}{\sqrt{1+(u'(x)+t\varphi'(x))^2}} \frac{1}{u(x)+t\varphi(x)} \right\} dx \Big|_{t=0}$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \frac{u'(x)\varphi'(x)}{\sqrt{1+u'(x)^2} u(x)} - \frac{1}{2u(x)^{3/2}} \sqrt{1+u'(x)^2} \varphi(x) \right\} dx$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} \left(-\frac{d}{dx} \left(\frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)} \sqrt{1+u'(x)^2}} \right) - \frac{1}{2u(x)^{3/2}} \sqrt{1+u'(x)^2} \right) \varphi(x) dx$$

$$\stackrel{\text{I.H.L.}}{\Rightarrow} 0 = -\frac{d}{dx} \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)} \sqrt{1+u'(x)^2}} - \frac{1}{2u(x)^{3/2}} \sqrt{1+u'(x)^2}$$

$$= \underbrace{-\frac{u''(x)}{\sqrt{u(x)} (1+u'(x)^2)^{3/2}}}_{\textcircled{1}} + \underbrace{\frac{1}{2} \frac{1}{u(x)^{3/2}} \frac{u'(x)^2}{(1+u'(x)^2)^{3/2}}}_{\textcircled{2}}$$

$$+ \underbrace{\frac{u'(x)^2 u''(x)}{\sqrt{u(x)} (1+u'(x)^2)^{3/2}}}_{\textcircled{1}} - \underbrace{\frac{1}{2} \frac{1}{u(x)^{3/2}} \frac{1}{(1+u'(x)^2)^{3/2}}}_{\textcircled{2}}$$

$$= \underbrace{-\frac{u''(x)}{\sqrt{u(x)} (1+u'(x)^2)^{3/2}}}_{\textcircled{1}} - \underbrace{\frac{1}{2} \frac{1}{u(x)^{3/2}} \frac{1}{(1+u'(x)^2)^{3/2}}}_{\textcircled{2}}$$

Multipliziere mit $u(x)^{3/2} \cdot (1+u'(x)^2)^{3/2}$

$$\Rightarrow 0 = -u''(x) u(x) - \frac{1}{2} (1+u'(x)^2)$$

(d) Wir wollen lösen

$$v''(x) v(x) + \frac{1}{2} (1 + v'(x)^2) = 0$$

Dazu suchen wir Erhaltungsgrößen.

(Man kann natürlich auch einfach die Formel auf dem Blatt ableiten. Das ist aber sehr unbefriedigend, weil die Formel ja 'vom Himmel fällt'.

Ansatz Hat eine Dgl zweiter Ordnung die Gestalt

$$v''(x) F(v(x)) + g(v'(x)) = 0$$

so liefert der Ansatz

$$A(v(x)) B(v'(x)) = C = \text{const.}$$

eine Erhaltungsgröße.

In unserem Fall:

$$A(v(x)) B(v'(x)) = \text{const.}$$

$$\Leftrightarrow 0 = \frac{d}{dx} A(v(x)) B(v'(x)) = A'(v(x)) v'(x) B(v'(x)) + A(v(x)) B'(v'(x)) v'(x)$$

$$\Rightarrow 0 = \underbrace{\frac{v'(x) B(v'(x))}{B'(v'(x))}}_{\doteq g(v'(x))} + \underbrace{\frac{A(v(x))}{A'(v(x))}}_{\doteq F(v(x))} v''(x)$$

$$\Rightarrow \frac{B(s)}{B'(s)} = \frac{1}{2} \frac{1+s^2}{s}$$

$$\text{und } \frac{A(s)}{A'(s)} = s$$

$$\text{d.h. } A'(s) = \frac{1}{s} A(s) \Rightarrow A(s) = C \exp\left(\int \frac{1}{t} dt\right) = C \exp(\ln s) = C s$$

$$B'(s) = \frac{2s}{1+s^2} B(s) \Rightarrow B(s) = \tilde{C} \exp(\ln(1+s^2)) = \tilde{C} (1+s^2)$$

$$\Rightarrow \text{const} = A(v(x)) B(v'(x)) = Dv(x) (1+v'(x)^2) \quad (1)$$

oder auch

$$v(x) (1+v'(x)^2) = \text{const.}$$

e)

Z u hat die Parameterdarstellung

$$\begin{pmatrix} x \\ u(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s - \sin s \\ 1 - \cos s \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow s \in C^2(x_1, x_2)$ und u löst

$$u''(x)u(x) + \frac{1}{2}(1+u'(x)^2) = 0$$

Nehmen wir zunächst einfach an, dass $s \in C^2(x_1, x_2)$.

$$u'(x) = \frac{du}{dx} = \frac{\frac{du}{ds}}{\frac{dx}{ds}} = \frac{\sin s}{1 - \cos s}$$

$$\Rightarrow u''(x) = \frac{d}{dx} u'(x) = \frac{\frac{d}{ds} u'(x)}{\frac{dx}{ds}}$$

$$= \frac{\frac{d}{ds} \frac{\sin s}{1 - \cos s}}{1 - \cos s} = \frac{\frac{\cos s}{1 - \cos s} - \frac{\sin^2 s}{(1 - \cos s)^2}}{1 - \cos(s)}$$

$$= \frac{\cos(s)(1 - \cos s) - \sin^2 s}{(1 - \cos(s))^3} = \frac{\cos(s) - \cos^2 s - \sin^2 s}{(1 - \cos(s))^3}$$

$$= \frac{\cos(s) - 1}{(1 - \cos(s))^3} = - \frac{1}{(1 - \cos s)^2}$$

$$\Rightarrow u''(x)u(x) + \frac{1}{2}(1+u'(x)^2)$$

$$= - \frac{1}{(1 - \cos s)^2} (1 - \cos(s)) + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\sin^2 s}{(1 - \cos s)^2} \right)$$

$$= - \frac{1}{1 - \cos(s)} + \frac{1}{2} \frac{(1 - \cos s)^2 + \sin^2 s}{(1 - \cos s)^2} = - \frac{1}{1 - \cos s} + \frac{1}{2} \frac{1 - 2\cos s + \cos^2 s + \sin^2 s}{(1 - \cos s)^2}$$

$$= \Rightarrow - \frac{1}{1 - \cos(s)} + \frac{1}{2} \frac{2 - 2\cos s}{(1 - \cos s)^2} = 0$$

Wieso $s \in C^2(x_1, x_2)$?

$$\begin{pmatrix} x \\ u(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s - \sin s \\ 1 - \cos s \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x = s - \sin s$$

Beh für die meisten Werte von x_1, x_2 ist $s(x) \in C^2(x_1, x_2)$,

Bsp $0 < x_1 < x_2 < \pi$

$f(s) = s - \sin s$ ist monoton da.

$$f'(s) = 1 - \cos(s) \geq 0.$$

Außerdem $f(0) = 0$, $f(\pi) = \pi$

$x \in (x_1, x_2) \xrightarrow{\text{zws}} \exists s \in (0, \pi) :$

$$x = s(x) - \sin(s(x))$$

$\Rightarrow$ Da f streng monoton auf $(0, \pi)$ ist s -eindeutig
(siehe $f'!$ $f' > 0$ auf $(0, \pi)$.)

Nun lokaler Umkehrsatz

$f(s(x)) = x$. ~~Dann~~ $f \in C^2(0, \pi)$.

Dann $s \in C^2(x_1, x_2)$ sofern $\det(f'(s)) \neq 0 \forall s \in (0, \pi)$

$$\det f'(s) = \det(1 - \cos s) = 1 - \cos s \neq 0.$$

Aufgabe 4

(b) $\Omega = (a, b) \subset \mathbb{R}$ $u \in W^{1,p}((a, b))$

$\mathbb{R} \quad f(x) := u(x) + \int_a^x u'(s) ds \equiv \text{const.} \quad \text{f\"ur} \quad \text{sei } \varphi \in C_c^\infty(a, b)$

$$\begin{aligned} & \int_a^b f(x) \varphi'(x) dx \\ &= \int_a^b \left[u(x) \varphi'(x) + \left(\int_a^x u'(s) ds \right) \varphi'(x) \right] dx \\ &= \int_a^b u(x) \varphi'(x) + \int_a^b \int_a^x u'(s) \varphi'(x) ds dx \\ &\stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_a^b u(x) \varphi'(x) + \int_a^b \int_s^b u'(s) \varphi'(x) dx ds \\ &= \int_a^b u(x) \varphi'(x) + \int_a^b u'(s) (\varphi(b) - \varphi(s)) ds \\ &= \int_a^b u(x) \varphi'(x) + \int_a^b (-1) u'(s) \varphi(s) ds \\ &= \int_a^b u(x) \varphi'(x) - \int_a^b u'(x) \varphi(x) dx \\ &= 0 \quad \text{Wegen der Definition von } W^{1,p}(a, b) \end{aligned}$$

(c) $\Omega = B(0) \subset \mathbb{R}^3$

Finde alle $\alpha > 0$ sodass

$u(x) = \frac{1}{|x|^\alpha} \in W^{1,p}(\Omega)$

Bedingung! $u \in L^p(\Omega)$

Wir benutzen Zwischelinintegration

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = \int_0^\infty \left(\int_{\partial B_r(0)} f(y) dS(y) \right) dr \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall f \geq 0 \text{ messbar}$$

A4

$$\int_{B_1(0)} \frac{1}{|x|^{\alpha p}} dx = \int_0^1 \left[\int_{\partial B_r(0)} \frac{1}{|y|^{\alpha p}} dS(y) \right] dr$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{r^{\alpha p}} S(\partial B_r(0)) dr$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{r^{\alpha p}} 4\pi r^2 dr = 4\pi \int_0^1 r^{2-\alpha p} dr$$

$$= \frac{4\pi}{3-\alpha p} \quad \text{sofern} \quad \boxed{3-\alpha p > 0}$$

Bedingung 2 $\oint$ schwach diffbar

Sei $\varphi \in C_0^\infty(B_1(0))$

$$\int_{B_1(0)} \frac{1}{|x|^\alpha} \partial_{x_j} \varphi(x) dx \quad \xrightarrow[\text{DCT}]{\text{Lebesgue}} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{B_1(0) \setminus B_\varepsilon(0)} \frac{1}{|x|^\alpha} \partial_{x_j} \varphi(x) dx$$

$$\xrightarrow{\text{Gau\ss}} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial(B_1(0) \cap B_\varepsilon(0))} \varphi(x) \nu_j(x) \frac{1}{|x|^\alpha} dS(x) + \int_{B_1(0) \setminus B_\varepsilon(0)} \frac{\alpha x_j}{|x|^{\alpha+2}} \varphi(x) dx$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{\partial B_\varepsilon(0)} \varphi(x) \frac{x_j}{\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon^\alpha} dS(x) + \int_{B_1(0) \setminus B_\varepsilon(0)} \frac{\alpha x_j}{|x|^{\alpha+2}} \varphi(x) dx \right)$$

Nun $\int_{B_1(0)} \left| \frac{\alpha x_j}{|x|^{\alpha+2}} \right| |\varphi(x)| dx \leq \|\varphi\|_\infty \int_{B_1(0)} \frac{|\alpha|}{|x|^{\alpha+1}} dx \leq \|\varphi\|_\infty |\alpha| \int_0^1 \int_{\partial B_r(0)} \frac{4\pi r^2}{r^{\alpha+1}} dx$

$$= 4\pi \int_0^1 r^{1-\alpha} dx < \infty \quad (\Rightarrow) \quad \boxed{\alpha < 2}$$

$$\Rightarrow \text{Für } \alpha < 2$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{B_1(0) \setminus B_\varepsilon(0)} \frac{\alpha x_j}{|x|^{\alpha+2}} \varphi(x) dx \implies \int_{B_1(0)} \frac{\alpha x_j}{|x|^{\alpha+2}} \varphi(x) dx$$

Außerdem

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left| \int_{\partial B_\varepsilon(0)} \varphi(x) \frac{x_j}{\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon^\alpha} dS(x) \right| &\leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\varphi\|_\infty \frac{1}{\varepsilon^\alpha} 4\pi \varepsilon^2 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\varphi\|_\infty 4\pi \varepsilon^{2-\alpha} \\ &= 0 \implies \int_{B_1(0)} \frac{1}{|x|^\alpha} \partial_{x_j} \varphi(x) dx = - \int_{B_1(0)} \left(\frac{-\alpha x_j}{|x|^{\alpha+2}} \right) \varphi(x) dx \end{aligned}$$

Bedingung 3 Schwache Ableitung in $L^p(B_1(0))$

$$\int_{B_1(0)} \left| \frac{\alpha x_j}{|x|^{\alpha+2}} \right|^p dx \leq \alpha^p \int_{B_1(0)} \frac{1}{|x|^{(\alpha+1)p}} = \alpha^p \int_0^1 \frac{4\pi r^2}{r^{(\alpha+1)p}} < \infty$$

$$\Leftrightarrow \boxed{3 - (\alpha+1)p > 0}$$

$\Rightarrow$ Insgesamt

$$\alpha < \min\left(2, \frac{3}{p} - 1\right)$$

$$(d) f \in W^{1,p}(\Omega), \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \Rightarrow f\varphi \in W^{1,p}(\mathbb{R}^3)$$

Bew

$$1) f\varphi \in L^p(\mathbb{R}^3) \text{ denn}$$

$$\int_{\mathbb{R}^3} |f\varphi|^p dx \stackrel{\text{supp } \varphi \subset \Omega}{=} \int_{\Omega} |f\varphi|^p dx \leq \|\varphi\|_\infty^p \int_{\Omega} |f|^p dx < \infty$$

$$2) f\varphi \text{ schwach diff'bar denn } \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3) \quad j \in \{1, 2, 3\}$$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^3} f\varphi \partial_{x_j} \psi dx = \int_{\mathbb{R}^3} f (\partial_{x_j} \varphi \psi - \varphi \partial_{x_j} \psi) dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^3} f \partial_{x_j} (\varphi \psi) - \int_{\mathbb{R}^3} (\partial_{x_j} \varphi f) \psi dx$$

$\in C_c^\infty(\Omega) \text{ da } \text{supp } \varphi \subset \Omega$

$$= \int_{\Omega} f \partial_{x_j} (\varphi \psi) - \int_{\mathbb{R}^3} (\partial_{x_j} \varphi f) \psi dx$$

$$= - \int_{\Omega} (\partial_{x_j} f) \varphi \psi - \int_{\mathbb{R}^3} \partial_{x_j} \varphi f \psi dx$$

$$= - \int_{\mathbb{R}^3} (\partial_{x_j} f \varphi + \partial_{x_j} \varphi f) \psi dx$$

$$3) \text{ Schwache Ableitung in } L^p(\mathbb{R}^3) \text{ denn}$$

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\partial_{x_j} f \varphi + \partial_{x_j} \varphi f|^p dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^3} |\partial_{x_j} f \varphi + \partial_{x_j} \varphi f|^p dx$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^3} (|\partial_{x_j} f| |\varphi| + |\partial_{x_j} \varphi| |f|)^p dx$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^3} 2^p \left(\max(|\partial_{x_j} f| |\varphi|, |\partial_{x_j} \varphi| |f|) \right)^p dx$$

$$\leq 2^p \int_{\mathbb{R}^3} \max(|\partial_{x_j} f|^p |\varphi|^p, |\partial_{x_j} \varphi|^p |f|^p) dx$$

$$\leq 2^p \int_{\mathbb{R}^3} |\partial_{x_j} f|^p |\varphi|^p + |\partial_{x_j} \varphi|^p |f|^p dx$$

$$= 2^p \int_{\mathbb{R}^3} |\partial_{x_j} f|^p dx \|\varphi\|_{\infty}^p + 2^p \|\partial_{x_j} \varphi\|_2^p \int_{\mathbb{R}^3} |f|^p dx < \infty.$$

$$4(e) + (f)$$

Wir wissen $\frac{1}{|x|} \in W^{1,1}(B_1(0))$

Wähle

$$\varphi(x) = \begin{cases} 2^3 \exp\left(\frac{-1}{(1-2|x|)^2}\right) \frac{1}{C} & |x| < \frac{1}{2} \\ 0 & |x| \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Wobei $C > 0$ so, dass $\int_{\mathbb{R}^3} \varphi(x) dx = 1$

(d) $\Rightarrow \frac{\varphi(x)}{|x|} =: h(x) \in W^{1,1}(\mathbb{R}^3)$ und
unstetig bei 0 da $\varphi(0) = \frac{2^3 e^{-1}}{C} > 0$

Nun wähle eine Abzählung

$\mathbb{Q}^3 = \{r_1, r_2, \dots\}$ und betrachte

$\left(\sum_{\ell=1}^N \frac{1}{2^\ell} h(\cdot - r_\ell)\right)_{N \in \mathbb{N}}$ als Folge in $W^{1,1}(\mathbb{R}^3)$

Die Folge ist Cauchy, denn sei $\varepsilon > 0$
 $\Rightarrow \exists R > 0 : N, M \geq R \Rightarrow \sum_{\ell=\min(N,M)+1}^{\max(N,M)} \frac{1}{2^\ell} < \frac{\varepsilon}{\|h\|_{W^{1,1}}}$

Nun für $N, M \geq R$

$$\left\| \sum_{\ell=1}^N \frac{1}{2^\ell} h(\cdot - r_\ell) - \sum_{\ell=1}^M \frac{1}{2^\ell} h(\cdot - r_\ell) \right\|_{W^{1,1}}$$

$$\leq \sum_{\ell=\min(N,M)+1}^{\max(N,M)} \frac{1}{2^\ell} \|h(\cdot - r_\ell)\|_{W^{1,1}}$$

$$\leq \sum_{\ell=\min(N,M)+1}^{\max(N,M)} \frac{1}{2^\ell} \|h\|_{W^{1,1}} < \varepsilon.$$

$$\Rightarrow \exists g \in W^{1,1} \quad \sum_{\ell=1}^N \frac{1}{2^\ell} h(\cdot - r_\ell) \xrightarrow{W^{1,1}} g.$$

Nun hat

$$\left(\sum_{e=1}^N \frac{1}{2^e} h(\cdot - r_e) \right)_{N \in \mathbb{N}}$$

als $L^1(\mathbb{R}^2)$ konvergente

Folge eine f.ü. gegen g

konvergente Teilfolge. (die wir wieder mit N indizieren)

Beh.: g ist nirgends stetig.

Beweis Sei $x \in \mathbb{R}^2$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \exists r_{t_n} \in \mathbb{Q}^2 \quad \|r_{t_n} - x\| < \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow \exists z_n \in B_{\frac{1}{4^{t_n+n}}}(r_{t_n}) : \sum_{e=1}^N \frac{1}{2^e} h(z - r_e) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\text{p.k.w.}} g(z)$$

(denn sonst wäre die Konvergenz nicht fast überall)

$$g(z_n) \geq \frac{1}{2^{t_n}} h(z_n - r_{t_n}) \geq \frac{1}{2^{t_n}} 8 \exp\left(-\frac{1}{1 - 2/4^{t_n}}\right) \cdot \frac{1}{|z_n - r_{t_n}|}$$

$$\geq 8 \frac{4^{t_n} \cdot 4^n}{2^{t_n}} \exp\left(-\frac{1}{1 - 2/4^{t_n}}\right) \geq 4^n 8 2^{t_n} \exp\left(-\frac{1}{1 - 2/4^{t_n}}\right)$$

$$\geq 4^n \cdot 8 \exp\left(-\frac{1}{1 - \frac{1}{2}}\right) \geq 4^n 8 e^{-2}$$

$$\rightarrow \infty \quad (n \rightarrow \infty)$$

$$\Rightarrow \exists z_n \rightarrow x : g(z_n) \rightarrow \infty \Rightarrow g \text{ ist}$$

bei x unstetig