Universität Ulm

Abgabe: Montag, 23.10.2017

Prof. Dr.Anna Dall'Acqua
Marius Müller
Wintersemester 2017/18
Punktzahl: keine

Übungen Variationsrechnung: Blatt 1

1. (Das Hauptlemma der Variationsrechnung)

In der folgenden Übungsaufgabe wollen wir Lemma 1 der Vorlesung in einem Spezialfall beweisen. Unsere Form von Lemma 1 sieht so aus: Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $u \in C(\Omega)$ so, dass

$$\int_\Omega uv \, dx = 0 \quad \forall v \in C_0^\infty(\Omega) \tag{1}$$

Dann gilt $u \equiv 0$.

(a) Beweise die Aussage des Lemmas in dem oben gegebenen Spezialfall.

(b) BONUS: Es sei μ ein Radonmaß auf $(a,b) \subset \mathbb{R}$ sodass für jedes $u \in L^1_{loc}((a,b), \mathcal{B}, \mu)$ gilt dass

$$\int_{(a,b)} uv \, d\mu = 0 \quad \forall v \in C_0^\infty((a,b)) \quad \Rightarrow u \equiv 0 \quad \mu - \text{fast ueberall} \tag{2}$$

Zeige unter Zuhilfenahme des Satzes von Radon-Nikodym, dass es dann eine Funktion $f \in L^1_{loc}(a,b)$ gibt sodass

$$\mu(A) = \int_A f dx \quad \forall A \subset (a,b) \quad \text{Borel} \tag{3}$$

Folgere, dass $u \equiv 0$ μ-f.ü. impliziert $fu = 0$ Lebesgue-fast überall.

(c) Es sei $(a,b) \subset \mathbb{R}$ mit $-\infty \leq a < b \leq \infty$. Zeige, dass für jedes $u \in L^1_{loc}(a,b)$ so, dass

$$\int_a^b u\phi' = 0 \quad \forall \phi \in C_0^\infty(a,b) \tag{4}$$

gilt, dass u fast überall konstant ist.

(d) BONUS: Formuliere und beweise eine Verallgemeinerung von Aufgabenteil (c) für Funktionen in $L^1_{loc}(\Omega)$ wobei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet ist.

2. (Die Brachystochrone)

Wie muss man eine Murmelbahn bauen, damit die Murmel schnellstmöglich hinunterrollt?

(a) Lies dir die hier (`https://www.uni-ulm.de/fileadmin/website_uni_ulm/mawi.inst.010/Mueller/WISE17/Dokument01Marius.pdf`) zu findende physikalische Herleitung der Energie der Brachystochrone durch.

(b) Im Rahmen der Variationsrechnung sind wir bei folgendem Problem angelangt. Seien $y_1, y_2 > 0$ und $x_1 < x_2$. Es sei $X = C^0([x_1, x_2])$ und

$$U = \{u \in X | u \in C^1(x_1, x_2), u(x_1) = y_1, u(x_2) = y_2, u(x) > 0 \, \forall x \in [x_1, x_2]\} \tag{5}$$

Definiere $\mathcal{E} : U \to \mathbb{R}$ über

$$\mathcal{E}(u) = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{\frac{1 + (u')^2}{u}} dx \tag{6}$$

Angenommen, es gibt $v \in C^2(x_1, x_2)$ sodass $\mathcal{E}(v) = \inf_{u \in U} \mathcal{E}(u)$. Folgere, dass

$$v''(x)v(x) + (1 + v'(x)^2) = 0 \quad \forall x \in (x_1, x_2) \tag{7}$$

und schließe, dass v konkav ist.

(c) Folgere, dass es eine Konstante $C > 0$ gibt sodass

$$\frac{1}{\sqrt{v(x)(1+v'(x)^2)}} = C \quad \forall x \in (x_1, x_2) \tag{8}$$

Zeige, dass für $D > 0$ jede Funktion $v \in C^2(x_1, x_2)$, die der Parameterdarstellung

$$\begin{pmatrix} x \\ v(x) \end{pmatrix} = \frac{D}{2} \begin{pmatrix} s - \sin(s) \\ 1 - \cos(s) \end{pmatrix} \tag{9}$$

die Euler Lagrange Gleichung löst. Kann man D stets so wählen, dass $v \in U$?

3. (Frechét-Ableitung, Gateaux-Ableitung und Gradient)

In der Vorlesung haben wir bereits besprochen, dass Ableitungsbegriffe im unendlich-dimensionalen oft zu restriktiv für unsere Betrachtung sind und daher in der Theorie der Variationsrechnung zu umgehen sind. Dennoch schadet es nicht, ein bisschen über die Konzepte bescheid zu wissen:
Definition: Es seien X, Y normierte Räume $U \subset X$ offen. Eine Abbildung $f : U \to Y$ heißt bei $x_0 \in U$ Gateaux-Differenzierbar, falls es einen stetigen linearen Operator $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ gibt sodass

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + hv) - f(x_0)}{h} = Tv \tag{10}$$

In diesem Falle heisst T die Gateaux-Ableitung von f bei x_0
Definition: Es seien X, Y wiederum normierte Räume und $U \subset X$ offen. Eine Abbildung $f : U \to Y$ heißt im Punkte $x_0 \in U$ Frechet-differenzierbar falls es $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ und gibt sodass

$$\lim_{||w||_X \to 0} \frac{||f(x_0 + w) - f(x_0) - Tw||_Y}{||w||_X} = 0 \tag{11}$$

(a) Es seien X,Y normierte Räume und $f : X \to Y$ Frechet-differenzierbar. Zeige, dass dann f auch Gateaux-differenzierbar ist.

(b) Gebe ein Beispiel für normierte Räume X, Y, eine offene Teilmenge $U \subset X$ und eine Abbildung $f : U \to Y$, die Frechet-differenzierbar, aber nicht Gateaux-Differenzierbar ist.

(c) Es sei $f : L^2 \to L^1$ gegeben durch $f(u) = u^2$. Berechne die Gateaux-Ableitung von f. Ist f auch Frechét-Differenzierbar ?

(d) Es sei H ein Hilbertraum und $f : H \to \mathbb{R}$ Gateaux-differenzierbar. Zeige, dass zu jedem $x_0 \in H$ ein Element $y =: \nabla_H f(x_0)$ gibt, sodass für jedes $w \in H$

$$\frac{d}{dt} f(x_0 + tw) \mid_{t=0} = \langle y, w \rangle_H \tag{12}$$

gilt. **Anmerkung:** Es handelt sich zwar nicht um die Definition des H-Gradienten einer Funktion, aber durchaus um eine sinnvolle Charakterisierung.

4. (Sobolevräume im Mehrdimensionalen)

In dieser Aufgabe wollen wir uns erinnern, was Sobolevfunktionen sind und was für geometrische Eigenschaften wir von ihnen erwarten können. Es ist nicht unwahrscheinlich, dass ihr diese Aufgabe schon kennt. Hierfür definieren wir für $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ den normierten Raum $W^{1,p}(\Omega)$ als den Raum aller schwach differnzierbaren Funktionen, die selbst in L^p liegen und deren Ableitung auch in L^p liegt. $W_0^{1,p}(\Omega)$.

(a) Lies dir die Einführung in (`https://www.uni-ulm.de/fileadmin/website_uni_ulm/mawi.inst.010/Mueller/WISE17/Dokument2Marius.pdf`) zu Sobolevräumen durch (sofern du es noch nicht kennst).

(b) Zeige, dass $W^{1,p}(a, b) \subset C([a, b])$ und zeige, dass es eine $W^{1,1}(\mathbb{R}^3)$-Funktion gibt, die sogar nirgends stetig ist

(c) BONUS: Es sei $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ und $n > 1$. Vergewissere dich, dass für Lebesgue fast alle $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$ die Funktionen $u(x', \cdot)$ und $D_{x_n} u(x', \cdot)$ in $L^p(\mathbb{R})$ sind und zeige, dass für diese x' gilt, dass $u(x', \cdot) \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ ist.