Übungen Variationsrechnung: Blatt 1

1. (Das Hauptlemma der Variationsrechnung)

In der folgenden Übungsaufgabe wollen wir Lemma 1 der Vorlesung in einem Spezialfall beweisen. Unsere Form von Lemma 1 sieht so aus: Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $u \in C(\Omega)$ so, dass

$$\int_\Omega uv\, dx = 0 \quad \forall v \in C_0^\infty(\Omega) \tag{1}$$

Dann gilt $u \equiv 0$.

(a) Angenommen $u \in C(\Omega)$ erfüllt $u(x_0) > 0$ für ein $x_0 \in \Omega$. Zeige, dass es $r > 0$ gibt mit $u(x) > 0$ für alle $x \in \overline{B_r(x_0)}$.

(b) Beweise, dass es für jedes $x_0 \in \Omega$ und $r > 0$ mit $\overline{B_r(x_0)} \subset \Omega$ ein $v \in C_0^\infty(\Omega)$ gibt so, dass $\mathrm{supp}(v) \subset \overline{B_r(x_0)}$ und $v(x) \geq 0$ für jedes $x \in \overline{B_r(x_0)}$

(c) Beweise die Aussage des Lemmas mit Hilfe von (a) und (b).

(d) BONUS: Es sei μ ein Radonmaß auf $(a, b) \subset \mathbb{R}$ sodass für jedes $u \in L^1_{loc}((a, b), \mathcal{B}, \mu)$ gilt dass

$$\int_{(a,b)} uv\, d\mu = 0 \quad \forall v \in C_0^\infty((a, b)) \quad \Rightarrow u \equiv 0 \quad \mu - \text{fast ueberall} \tag{2}$$

Zeige unter Zuhilfenahme des Satzes von Radon-Nikodym, dass es dann eine Funktion $f \in L^1_{loc}(a, b)$ gibt sodass

$$\mu(A) = \int_A f dx \quad \forall A \subset (a, b) \quad \text{Borel} \tag{3}$$

Folgere, dass $u \equiv 0$ μ-f.ü. impliziert $fu = 0$ Lebesgue-fast überall.

(e) Es sei $(a, b) \subset \mathbb{R}$ mit $-\infty \leq a < b \leq \infty$. Im Folgenden wollen wir zeigen, dass für jedes $u \in L^1_{loc}(a, b)$ so, dass

$$\int_a^b u\phi' = 0 \quad \forall \phi \in C_0^\infty(a, b) \tag{4}$$

gilt, dass u fast überall konstant ist. Gewöhne dich zunächst an die Behauptung und beweise sie im Spezialfall $u \in C^1(a, b)$.

(f) Zeige, dass es $\eta \in C_0^\infty(a, b)$ gibt, sodass $\int_a^b \eta(t)dt = 1$ und folgere, dass für $\phi \in C_0^\infty(a, b)$ gilt, dass

$$\psi(x) := \int_a^x \phi(s)ds + \int_a^x \eta(t)dt \int_a^b \phi(s)ds \tag{5}$$

eine Funktion in $C_0^\infty(a, b)$ definiert.

(g) Es sei $u \in L^1_{loc}(a, b)$, sodass (4) erfüllt ist. Folgere, dass für alle $\phi \in C_0^\infty(a, b)$ gilt

$$\int_a^b u(x)\phi(x)dx = -\int_a^b \int_a^b \eta(x)u(x)\phi(s)dsdx \tag{6}$$

Vertausche die Integrationsreihenfolge und die Namen der Integrationsvariablen um zu zeigen, dass es $C = C(u) \in \mathbb{R}$ gibt sodass

$$\int_a^b u(x)\phi(x)dx = \int_a^b C\phi(x)dx \quad \forall \phi \in C_0^\infty(a, b) \tag{7}$$

Folgere, dass u fast überall konstant ist

(h) BONUS: Warum hat die Vorlesung zweite Hauptlemma nur in einer Dimension behandelt ? Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, $(\phi_\epsilon)_{\epsilon>0}$ der Standard-Mollifier und $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ sodass

$$\int_\Omega u \partial_{x_i} \phi dx = 0 \quad \forall i = 1, ..., n \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega) \tag{8}$$

Dann gilt $u_\epsilon := u * \phi_\epsilon$ ist konstant auf jeder Zusammenhangskomponente von $\Omega_\epsilon := \{x \in \Omega : \text{dist}(x, \Omega^C) > \epsilon\}$

(i) BONUS: Betrachte das Setting der letzten Aufgabe. Wir nehmen nun an, dass es sein $\epsilon_0 > 0$ gibt so, dass Ω_ϵ zusammenhängend ist für alle $\epsilon < \epsilon_0$. Verwende den Lebesgue'schen Differentiationssatz oder einen Maßtheorie-Satz deines Vertrauens um zu zeigen, dass $u_{\frac{1}{n}}$ punktweise fast überall auf Ω gegen u konvergiert. Folgere, dass u konstant auf Ω ist.

(j) BONUS: Sei nun $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Definiere für $c \in u(\Omega)$

$$U := \{x \in \Omega | u(y) = c \text{ für fast alle } y \in B_r(x) \quad \forall x \in \Omega : \overline{B_r(x)} \subset \Omega\} \tag{9}$$

Zeige, dass U offen und relativabgeschlossen zugleich ist und folgere dass $U = \Omega$.

2. (Die Brachystochrone)

Wie muss man eine Murmelbahn bauen, damit die Murmel schnellstmöglich hinunterrollt?

(a) Lies dir die hier (`https://www.uni-ulm.de/fileadmin/website_uni_ulm/mawi.inst.010/Mueller/WISE17/Dokument01Marius.pdf`) zu findende physikalische Herleitung der Energie der Brachystochrone durch.

(b) Im Rahmen der Variationsrechnung sind wir bei folgendem Problem angelangt. Seien $y_1, y_2 > 0$ und $x_1 < x_2$. Es sei $X = C^0([x_1, x_2])$ und

$$U = \{u \in X | u \in C^1(x_1, x_2), u(x_1) = y_1, u(x_2) = y_2, u(x) > 0 \; \forall x \in [x_1, x_2]\} \tag{10}$$

Definiere $\mathcal{E} : U \to \mathbb{R}$ über

$$\mathcal{E}(u) = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{\frac{1 + (u')^2}{u}} dx \tag{11}$$

Berechne für $\phi \in C_0^\infty((x_1, x_2))$

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}(u + t\phi) \mid_{t=0} \tag{12}$$

(c) Angenommen, es gibt $v \in C^2(x_1, x_2)$ sodass $\mathcal{E}(v) = \inf_{u \in U} \mathcal{E}(u)$. Folgere, dass

$$v''(x)v(x) + \frac{1}{2}(1 + v'(x)^2) = 0 \quad \forall x \in (x_1, x_2) \tag{13}$$

und schließe, dass $v''(x) \leq 0$ für alle $x \in (x_1, x_2)$. Damit wäre die Lösung strikt konkav.

(d) Folgere, dass es eine konstante $C > 0$ gibt sodass

$$\frac{1}{\sqrt{v(x)(1 + v'(x)^2)}} = C \quad \forall x \in (x_1, x_2) \tag{14}$$

(e) Nehmen wir nun an, dass $x_1 > \pi$ und $x_2 < 2\pi$. Angenommen es gibt $u \in C^2(x_1, x_2)$, $D > 0$ und eine Funktion $s = s(x)$ sodass für alle $x \in (x_1, x_2)$ gilt

$$\begin{pmatrix} x \\ u(x) \end{pmatrix} = \frac{D}{2} \begin{pmatrix} s(x) - \sin(s(x)) \\ 1 - \cos(s(x)) \end{pmatrix} \quad \forall x \in (0, x_2) \tag{15}$$

Zeige, dass $s \in C^2((x_1, x_2))$ und folgere, dass $u(x)$ die Euler-Lagrange-Gleichung löst. Kann D stets so gewählt werden, dass $u(x) \in U$?

3. (Frechét-Ableitung, Gateaux-Ableitung und Gradient)

In der Vorlesung haben wir bereits besprochen, dass Ableitungsbegriffe im unendlich-dimensionalen oft zu restriktiv für unsere Betrachtung sind und daher in der Theorie der Variationsrechnung zu umgehen sind. Dennoch schadet es nicht, ein bisschen über die Konzepte bescheid zu wissen:

Definition: Es seien X, Y normierte Räume $U \subset X$ offen. Eine Abbildung $f : U \to Y$ heißt bei $x_0 \in U$ Gateaux-Differenzierbar, falls es einen stetigen linearen Operator $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ gibt sodass

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + hv) - f(x_0)}{h} = Tv \tag{16}$$

In diesem Falle heisst T die Gateaux-Ableitung von f bei x_0
Definition: Es seien X, Y wiederum normierte Räume und $U \subset X$ offen. Eine Abbildung $f : U \to Y$ heißt im Punkte $x_0 \in U$ Frechet-differenzierbar falls es $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ und gibt sodass

$$\lim_{||w||_X \to 0} \frac{||f(x_0 + w) - f(x_0) - Tw||_Y}{||w||_X} = 0 \tag{17}$$

(a) Es seien X,Y normierte Räume und $f : X \to Y$ Frechet-differenzierbar bei $x_0 \in X$. Zeige, dass dann f auch Gateaux-differenzierbar in x_0 ist.

(b) Gebe ein Beispiel für normierte Räume X, Y, eine offene Teilmenge $U \subset X$ und eine Abbildung $f : U \to Y$, die weder Frechet-differenzierbar, noch Gateaux-Differenzierbar ist, aber die Richtungsableitung in jede Richtung existiert.

(c) Es sei $f : L^2 \to L^1$ gegeben durch $f(u) = u^2$. Berechne die Gateaux-Ableitung von f. Ist f auch Frechét-Differenzierbar ?

(d) Es sei H ein Hilbertraum und $f : H \to \mathbb{R}$ Gateaux-differenzierbar. Zeige, dass zu jedem $x_0 \in H$ ein Element $y =: \nabla_H f(x_0)$ gibt, sodass für jedes $w \in H$

$$\frac{d}{dt} f(x_0 + tw) \mid_{t=0} = \langle y, w \rangle_H \tag{18}$$

gilt. **Anmerkung:** Es handelt sich zwar nicht um die Definition des H-Gradienten einer Funktion, aber durchaus um eine sinnvolle Charakterisierung.

4. (Sobolevräume im Mehrdimensionalen)

In dieser Aufgabe wollen wir uns erinnern, was Sobolevfunktionen sind und was für geometrische Eigenschaften wir von ihnen erwarten können. Es ist nicht unwahrscheinlich, dass ihr diese Aufgabe schon kennt. Hierfür definieren wir für $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ den normierten Raum $W^{1,p}(\Omega)$ als den Raum aller schwach differnzierbaren Funktionen, die selbst in L^p liegen und deren Ableitung auch in L^p liegt. $W_0^{1,p}(\Omega)$. Für diese Aufgabe sei stets $1 \leq p \leq \infty$

(a) Lies dir die Einführung in `https://www.uni-ulm.de/fileadmin/website_uni_ulm/mawi.inst.010/Mueller/WISE17/Dokument2Marius.pdf` zu Sobolevräumen durch (sofern du es noch nicht kennst).

(b) Es sei $\Omega = (a, b) \subset \mathbb{R}$. Zeige mit Hilfe des 2. Hauptlemmas der Variationsrechnung, dass für jedes $u \in W^{1,p}(0, 1)$

$$f(x) := u(x) + \int_a^x u'(s) ds \tag{19}$$

fast überall konstant ist. Wähle nun einen Repräsentanten von u, sodass f konstant ist. Folgere, dass u auf (a, b) gleichmäßig stetig ist und $\lim_{x \to a+} u(x)$ sowie $\lim_{x \to b-} u(x)$ als reelle Zahlen existieren. Folgere, dass sich u zu einer Funktion in $C([a, b])$ fortsetzen lässt für die gilt

$$u(x) = u(a) + \int_a^x u'(s) ds. \tag{20}$$

(c) Es sei $\Omega = B_1(0) \subset \mathbb{R}^3$. Finde alle $\alpha > 0$ sodass $u(x) = \frac{1}{|x|^\alpha}$ in $W^{1,p}(\Omega)$ liegen und folgere, dass es im mehrdimensionalen $W^{1,p}-$ Funktionen gibt die nicht stetig sind. Beachte, dass wir u bei Null nicht definieren müssen, weil es sich um eine Lebesguesche Nullmenge handelt.

(d) Es sei $f \in W^{1,p}(\Omega)$ und $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$. Zeige dass $f\phi \in W^{1,p}(\mathbb{R}^3)$

(e) Es sei $f \in W^{1,1}(\mathbb{R}^3)$ so, dass f bei 0 unstetig ist. Dann ist für $x_1, ..., x_N \in \mathbb{R}^3$

$$g := \sum_{k=1}^{N} f(x - x_N) \tag{21}$$

in $W^{1,1}(\mathbb{R}^3)$ und erfüllt, dass g bei $x_1, ..., x_N$ unstetig ist.

(f) Finde eine $W^{1,1}(\mathbb{R}^3)$-Funktion, die nirgends stetig ist. Die vorigen Ideen können dir dabei behilflich sein. .

(g) BONUS: Es sei $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ und $n > 1$. Vergewissere dich, dass für Lebesgue fast alle $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$ die Funktionen $u(x', \cdot)$ und $D_{x_n} u(x', \cdot)$ in $L^p(\mathbb{R})$ sind und zeige, dass für diese x' gilt, dass $u(x', \cdot) \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ ist.