Universität Ulm

Abgabe: Dienstag, 13.06.2017

Prof. Dr. Friedmar Schulz
Marius Müller
Sommersemester 2017
Punktzahl: 21

# Lösungsvorschlag Elemente der Funktionentheorie: Blatt 2

In diesem Übungsblatt geht es um die wunderliche Geometrie, die uns die Riemann-Sphäre gibt. Wir wollen untersuchen, wie sich bestimmte Operationen in $\mathbb{C}_\infty$ in Operationen in der Riemann-Sphäre übersetzen und den chordalen Abstand besser verstehen. Einige Identitäten aus dem Skript werden dabei benötigt! Für dieses Blatt definieren wir - wie in der Vorlesung -

$$S := \left\{ (\xi, \eta, \mu) \in \mathbb{R}^3 : \xi^2 + \eta^2 + \left(\mu - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \right\}.$$

Wir betrachten auch die folgende Abbildung $\phi : S \to \mathbb{C}_\infty$, die einen Punkt auf $S$ zu der Zahl in $\mathbb{C}_\infty$ schickt, mit der Sie im Sinne von Abschnitt 1.4.2. identifiziert wird. Wir betrachten ferner die metrischen Räume $(S, \chi_1)$ und $(\mathbb{C}_\infty, \chi_2)$, wobei $\chi_1, \chi_2$ den chordalen Abstand bezeichne. Hierzu möchte ich drei Definitionen in Erinnerung rufen:
1)Eine Folge $(x_n) \subset M$ in einem metrischen Raum $(M, d)$ heißt konvergent, falls es ein $x \in M$ gibt, sodass $d(x_n, x) \to 0$ für $n \to \infty$. Dann heißt auch $x$ der Grenzwert
2) Sei $(M, d)$ ein metrischer Raum und $K \subset M$. Dann heißt $K$ kompakt, wenn jede Folge $(x_n) \subset K$ eine konvergente Teilfolge $(x_{l_n})$ mit Grenzwert in K besitzt.
3) Sei $(M, d)$ ein metrischer Raum. $A \subset M$ heißt abgeschlossen, falls für jede konvergente Folge $(x_n) \subset A$ der Grenzwert $x$ wieder in $A$ liegt
Im Metrischen Raum $(\mathbb{C}, d)$ haben wir die kompakten Mengen als alle abgeschlossenen und beschränkten Mengen identifiziert. In allgemeinen metrischen Räumen lassen sich kompakte Mengen nicht so einfach charakterisieren. Dieses Blatt soll helfen, die kompakten Mengen in $(S, \chi_1)$ und $(\mathbb{C}_\infty, \chi_2)$ zu verstehen.

**11.** Skizziere die folgenden Mengen und gebe eine möglichst einfache Beschreibung. (4)

- $D(\infty; \frac{1}{2}) := \{z \in \mathbb{C}_\infty | \chi_2(\infty, z) < \frac{1}{2}\}$ in $\mathbb{C}_\infty$ .
- $\{z \in \mathbb{C}_\infty : \chi_2(z, \infty) \leq \frac{1}{2}\} \cup \infty$ in $\mathbb{C}_\infty$ .
- $\phi^{-1}(D(\infty; \frac{1}{2}))$ in $S$.
- $\phi^{-1}(\mathbb{R}_\infty)$ in $S$, wobei $\mathbb{R}_\infty = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

**12.** Es sei $A \subset C_\infty$ und $\infty \notin A$. Zeige: $A$ ist abgeschlossen in $(\mathbb{C}_\infty, \chi_2)$ genau dann wenn $A$ kompakt in $(\mathbb{C}, d)$ ist, wobei $d$ die kanonische Metrik auf $\mathbb{C}$ ist. (2)

**13.** Zeige, dass $\mathbb{R}_\infty$ kompakt in $\mathbb{C}_\infty$ liegt, d.h für jede Folge $(x_n) \subset \mathbb{R}_\infty$ gibt es eine Teilfolge $(x_{l_n})$ und ein $x \in \mathbb{R}_\infty$ sodass $\chi_2(x_{l_n}, x) \to 0$ für $n \to \infty$. (2)

**Lösungsvorschlag:** Wir unterscheiden für die Lösung dieser Aufgabe zwei Fälle.
**Fall 1**: Es gibt einen Index $N \in \mathbb{N}$ sodass $(x_n)_{n \geq N}$ eine beschränkte Folge ist. In diesem Fall gibt uns der Satz von Bolzano-Weierstraß eine konvergente Teilfolge in $\mathbb{C}$. Also gibt es eine Teilfolge $(x_{l_n})_{n \geq N}$ und ein $x \in \mathbb{C}$ sodass $|x_{l_n} - x| \to 0$ für $n \to \infty$. $x$ ist allerdings reell, weil $\mathbb{R}$ eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{C}$ ist. Nun berechnet man

$$0 \leq \chi_2(x_{l_n}, x) = \frac{|x_{l_n} - x|}{\sqrt{1 + |x_{l_n}|^2}\sqrt{1 + |x|^2}} \leq |x_{l_n} - x| \to 0. \tag{1}$$

Hierbei haben wir den Nenner nach unten durch 1 abgeschätzt. Das Sandwichlemma impliziert nun, dass $\chi_2(x_{l_n}, x) \to 0$ für $n \to \infty$.
**Fall 2**: Einen Index wie oben gibt es nicht. Damit enthält für jedes natürliche $N$ die Folge $(x_n)_{n \geq N}$ stets unendlich oder ist unbeschränkt. Somit gibt es für jedes $N \in \mathbb{N}$ ein $M_N \geq N$ sodass $|x_{M_N}| > N$. Hierbei setzen wir aus Bequemlichkeit $|\infty| = \infty > N$. Damit gilt

$$\chi_2(x_{M_N}, \infty) = \begin{cases} 0 & x_{M_N} = \infty \\ \frac{1}{\sqrt{1 + |x_{M_N}|^2}} & \text{sonst} \end{cases} \leq \frac{1}{\sqrt{1 + N^2}} \tag{2}$$

in beiden Fällen. Und somit

$$0 \leq \chi_2(x_{M_N}, \infty) \leq \frac{1}{\sqrt{1+N^2}} \to 0 \quad (N \to \infty). \tag{3}$$

Damit haben wir unsere konvergente Teilfolge auch in diesem Fall noch gefunden.

**14.** Zeige: Für jeden Punkt $(\xi, \eta, \mu) \in S$ gibt es genau ein $\psi \in (-\pi, \pi]$ sodass (2)

$$(\xi, \eta, \mu) = (\sqrt{\mu(1-\mu)} \cos\psi, \sqrt{\mu(1-\mu)} \sin\psi, \mu).$$

Die Koordinaten $(\mu, \psi)$ nennt man sphärische Polarkoordinaten. Beweise auch, dass $\psi = \arg(\phi(\xi, \eta, \mu))$.

**15.** (a) Wir definieren für eine Matrix $M := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{C})$ die sogenannte Möbiustransformation (2*) $T_M : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$ durch

$$T_M(z) = \begin{cases} \frac{az+b}{cz+d} & cz+d \neq 0 \\ \infty & cz+d = 0 \\ \frac{a}{c} & z = \infty \end{cases},$$

wobei wir hier temporär die Konvention $\frac{a}{c} = \infty$, wenn $c = 0$ treffen. Zeige: Für $M, N \in GL_n(\mathbb{C})$ gilt $T_{MN} = T_M \circ T_N$. Ferner ist $T_M$ stets invertierbar und $T_M^{-1} = T_{M^{-1}}$ .

**Lösungsvorschlag:** Sei $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ und $N = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ Wir berechnen $T_M \circ T_N$. Dazu unterscheiden wir einige Fälle:
Fall 1: $c' \neq 0$ . Sei $z \in \mathbb{C}$ sodass $c'z + d' \neq 0$. Dann hat man

$$T_M T_N(z) = T_M\left(\frac{a'z+b'}{c'z+d'}\right) = \frac{a\frac{a'z+b'}{c'z+d'} + b}{c\frac{a'z+b'}{c'z+d'} + d} \tag{4}$$

$$= \begin{cases} \frac{a(a'z+b')+b(c'z+d')}{c(a'z+b')+d(c'z+d')} & c(a'z+b')+d(c'z+d') \neq 0 \\ \infty & c(a'z+b')+d(c'z+d') = 0 \end{cases} \tag{5}$$

$$= \begin{cases} \frac{(aa'+bc')z+(ab'+bd')}{(ca'+dc')z+(cb'+dd')} & (ca'+dc')z+(cb'+dd') \neq 0 \\ \infty(ca'+dc')z+(cb'+dd') = 0 \end{cases} \tag{6}$$

Nun im Falle $c'z+d' = 0$ gilt $T_M \circ T_N(z) = T_M(\infty) = \frac{a}{c} = \frac{a(a'z+b')+b(c'z+d')}{c(a'z+b')+d(c'z+d')} = \frac{(aa'+bc')z+(ab'+bd')}{(ca'+dc')z+(cb'+dd')}$
.
Hierbei haben wir beim erweitern benutzt dass $a'z + b' \neq 0$ denn $N$ ist invertierbar und

$$\begin{pmatrix} a'z+b \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'z+b \\ c'z+d \end{pmatrix} = N * \begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Wäre nun $a'z + b' = 0$ so wäre $(z, 1) \in \ker(N)$ Nun muss noch $T_M \circ T_N(\infty)$ berechnet werden.

$$T_M \circ T_N(\infty) = \begin{cases} \frac{a\frac{a'}{c'}+b}{c\frac{a'}{c'}+d} & c\frac{a'}{c'} + d \neq 0 \\ \infty & c\frac{a'}{c'} + d = 0 \end{cases} \tag{8}$$

$$= \begin{cases} \frac{aa'+bc'}{ca'+dc'} & ca'+dc' \neq 0 \\ \infty & ca'+dc' = 0 \end{cases} \tag{9}$$

Alles zusammen: Falls $ca' + dc' \neq 0$ erhalten wir

$$T_M \circ T_N(z) = \begin{cases} \frac{(aa'+bc')z+(ab'+bd')}{(ca'+dc')z+cb'+dd'} & (ca'+dc')z+(cb'+dd') \neq 0 \\ \infty & (ca'+dc')z+(cb'+dd') = 0 \\ \frac{aa'+bc'}{ca'+dc'} & z = \infty \end{cases} \tag{10}$$

Falls hingegen $ca' + dc' = 0$ erhalten wir

$$T_M \circ T_N(z) = \begin{cases} \frac{(aa'+bc')z+ab'+bd'}{cb'+ad'} & z \neq \infty \\ \infty & z = \infty \end{cases} \tag{11}$$

Der nächste Fall ist dass $c' = 0$. In dem Fall erhalten wir

$$T_M \circ T_N(z) = T_M\left(\frac{a'}{d'}z + \frac{b'}{d'}\right) \tag{12}$$

Falls nun $c \neq 0$ ergibt das

$$\begin{cases} \frac{a(\frac{a'}{d'}z+\frac{b'}{d'})+b}{c(\frac{a'}{d'}z+\frac{b'}{d'})+d} & c(\frac{a'}{d'}z + \frac{b'}{d'}) + d \neq 0 \\ \infty & c(\frac{a'}{d'}z + \frac{b'}{d'}) + d = 0 \end{cases} \tag{13}$$

$$\begin{cases} \frac{aa'z+(b'a+bd')}{ca'z+b'c+dd'} & ca'z + b'c + dd' \neq 0 \\ \infty & ca'z + b'c + dd' \end{cases} \tag{14}$$

und außerdem $T_M \circ T_N(\infty) = T_M(\infty) = \frac{a}{c}$. Diese beiden Gleichungen fallen mit Gleichung (10) zusammen falls $c' = 0$ und ist damit konsistent mit dieser Gl. Nun, falls $c = c' = 0$ so gilt

$$T_M \circ T_N(z) = T_M\left(\frac{a'}{d'}z + \frac{b'}{d'}\right) = \frac{a}{d}\left(\frac{a'}{d'}z + \frac{b'}{d'}\right) + \frac{b}{d} = \frac{aa'z + ab' + bd'}{dd'} \tag{15}$$

und $T_M \circ T_N(\infty) = T_M(\infty) = \infty$.

Ein Ergebnis, das wiederum mit Gleichung (10) im Falle $c = c' = 0$ zusammenfällt. Betrachtet man (10) genauer, und schreibt

$$MN = \begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + dd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{pmatrix} \tag{16}$$

so sieht man an (10) dass $T_M \circ T_N = T_{MN}$ .

(b) Zeige: Jede Möbiustransformation $T_M$ lässt sich als Verkettung der folgenden Abbildungen schreiben (3)

- Drehung um einen Winkel $\theta$: $D_\theta(z) = e^{i\theta}z$, wobei wir hier dazu $D_\theta(\infty) = \infty$ setzen .
- Streckung um einen konstanten Faktor $\alpha > 0$: $S_\alpha(z) = \alpha z$, und wieder setzen wir stillschweigend $S_\alpha(\infty) = \infty$ .
- Verschiebung um $c \in \mathbb{C}$: $V_c(z) = z + c$, der unendlich ferne Punkt wird wieder auf sich selbst verschoben.
- Inversion $I(z) = \begin{cases} \frac{1}{z} & z \neq 0 \\ \infty & z = 0 \\ 0 & z = \infty \end{cases}$ .

Zu welchen Matrizen korrespondieren die einzelnen Abbildungen ?

(c) Ist $T_M$ eine Möbiustransformation, so ist $\phi^{-1} \circ T_M \circ \phi$ eine Abbildung von $S$ nach $S$. Beschreibe $\phi^{-1} \circ D_\theta \circ \phi$, $\phi^{-1} \circ S_\alpha \circ \phi$ und $\phi^{-1} \circ I \circ \phi$ geometrisch und gib ihre Abbildungsvorschrift wahlweise in den Koordinaten $(\xi, \eta, \mu)$ oder in den sphärischen Polarkoordinaten $(\psi, \mu)$ an. (3)

**Lösungsvorschlag:** Ich war in der Übung nur noch $\phi^{-1} \circ S_\alpha \circ \phi$ schuldig geblieben. Wie in der Übung treffen wir die Konvention $r = \sqrt{\mu(1-\mu)}$ und berechnen

$$\phi^{-1} \circ S_\alpha \circ \phi(r\cos\psi, r\sin\psi, \mu) = \phi^{-1} \circ S_\alpha\left(\frac{re^{i\psi}}{1-\mu}\right) \tag{17}$$

$$\phi^{-1}\left(\alpha\frac{re^{i\psi}}{1-\mu}\right) = (r'\cos\psi', r'\sin\psi', \mu') \tag{18}$$

wobei, sofern $z = \alpha r\frac{e^{i\psi}}{1-\mu}$

$$\mu' = \frac{|z|^2}{1+|z|^2} = \frac{\frac{\alpha^2r^2}{(1-\mu)^2}}{1+\frac{\alpha^2r^2}{(1-\mu)^2}} = \frac{\alpha^2\frac{\mu}{1-\mu}}{1+\alpha^2\frac{\mu}{1-\mu}} = \frac{\alpha^2\mu}{1-\mu+\alpha^2\mu} \tag{19}$$

Damit gilt

$$r' = \sqrt{\mu'(1-\mu')} = \sqrt{\frac{\alpha^2\mu(1-\mu)}{(1-\mu+\alpha^2\mu)^2}} = \frac{\alpha r}{1+(\alpha^2-1)\mu} \tag{20}$$

Und

$$\psi' = \arg(\frac{\alpha re^{i\psi}}{1-\mu}) = \psi, \tag{21}$$

bleibt also unverändert. Damit lässt $\phi^{-1} \circ S_\alpha \circ \phi$ das Argument fest, aber verändert den Breitengrad auf dem ein Punkt liegt. Man könnte es als eine Art Stülpung auffassen.

(d) Gib zwei Möbiustransformationen $T_{M_1}$ und $T_{M_2}$ an, sodass $\phi^{-1} \circ T_{M_i} \circ \phi$ den Großkreis $\mu = \frac{1}{4}$ auf den Großkreis $\mu = \frac{3}{4}$ abbildet. Außerdem soll $T_{M_1} \circ T_{M_2}^{-1}$ keine Drehung sein. (2)

**Lösungsvorschlag:** Mit Aufgabe ($c$) lassen sich zwei Transformationen identifizieren, sodass $\mu = \frac{1}{4}$ auf $\mu' = \frac{3}{4}$ geschickt wird. Die Erste ist $T_1 = I$ ($\mu' = 1 - \mu$ und die zweite ist $T_2 = S_\alpha$. Für welches $\alpha > 0$ haben wir Erfolg ? Falls $\mu = \frac{1}{4}$ so ist

$$\frac{3}{4} = \mu' = \frac{\alpha^2 \mu}{1 - \mu + \alpha^2 \mu} = \frac{\frac{\alpha^2}{4}}{\frac{3}{4} + \frac{\alpha^2}{4}} = \frac{\alpha^2}{3 + \alpha^2} \tag{22}$$

Löst man nach $\alpha$ auf so erhält man $\alpha^2 = 9$ und damit $\alpha = \pm 3$. Nehmen wir mal $T_2 = S_3$ wobei auch $S_{-3}$ klappen würde. $T_1 \circ T_2^{-1}(z) = T_1(\frac{z}{3}) = \frac{3}{z}$ ist keine Drehung denn gäbe es $\theta \in \mathbb{R}$ sodass $\frac{3}{z} = e^{i\theta} z$ für alle $z \in \mathbb{C}$, so wäre

$$z^2 = 3e^{-i\theta} \tag{23}$$

für alle $z \in \mathbb{C}$. Diese Gleichung hat aber nach der Theorie über komplexe Wurzeln nur zwei Lösungen.

**16.** Es sei $(M, d)$ ein metrischer Raum. Zeige, dass die Vereinigung endlich vieler kompakter Mengen wieder kompakt ist. (2)

**17.** Es seien $K_1, K_2, ... \subset \mathbb{C}$ kompakt und nichtleer, sodass $K_1 \supset K_2 \supset K_3 \supset ...$ . Zeige (2)

$$K := \bigcap_{i=1}^{\infty} K_i$$

ist kompakt und nichtleer.

Die folgende Frage gibt auf diesem Blatt noch keine Punkte aber wird auf dem nächsten Blatt eine Übungsaufgabe sein.

**18.** Gegeben sei die folgende Funktionenfolge

$$f_N(z) = \sum_{n=3}^{N} \frac{(-1)^n}{n + z} \tag{24}$$

Zeige, dass die Funktionenfolge gleichmäßig auf $D := \{z \in \mathbb{C} | 1 < |z| < 2\}$ konvergiert. Ist der Weierstraß-M-Test anwendbar ?

Einen schönen Feiertag!