Universität Ulm

Abgabe: Dienstag, 27.06.2017

Prof. Dr. Friedmar Schulz
Marius Müller
Sommersemester 2017
Punktzahl: 23

Übungen Elemente der Funktionentheorie: Blatt 3

Wir haben diese Woche einige unglaublich wichtige Konzepte kennen gelernt: Da wären Reihen und ihr Konvergenzverhalten, Potenzreihen und die komplexe Exponentialfunktion sowie der komplexe Logarithmus. Ein weiteres wichtiges Tool ist der Satz von Arzéla-Ascoli, den wir später noch benötigen werden.

19. (a) Entscheide, ob folgende Logartihmusausdrücke definiert sind und berechne sie, falls definiert : $\log i, \log(-1), \log(-1-\sqrt{3}i)$ (2)

(b) Finde alle Zahlen $i^{i \log i}$. Wie viele gibt es ? (1)

(c) Wir definieren für diese Aufgabe: $\sqrt{w} = \exp\left(\frac{1}{2}\log w\right)$ für $w \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{<0}$. Zeige, dass für den Hauptzweig des Logarithmus gilt $\sqrt{w} = z_w$, wobei z_w die Zahl, die in Aufgabe 10 Blatt 1 definiert wurde, ist. (2)

(d) Zeige: $\overline{\sqrt{z}} = \sqrt{\overline{z}}$. (2)

(e) Finde eine Potenzreihendarstellung für $f : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0} \to \mathbb{C}, f(z) := \frac{\sin\sqrt{z}}{\sqrt{z}}$ und zeige, dass sie auf dem gesamten Definitionsbereich konvergiert. Macht diese Potenzreihe auch für $z \in \mathbb{R}_{\leq 0}$ Sinn ? (2)

(f) Zeige $\sin(x+iy) = \sin(x)\cosh(y) + i\sinh(y)\cos(x)$. Folgere, dass $\sin(x+iy) = 0$ dann und nur dann wenn $x + iy = k\pi$ für ein $k \in \mathbb{Z}$. Finde alle komplexen Nullstellen von $\sinh : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. (3)

(g) Beweise für $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ (2)

$$\cos^n(x) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos((n-2k)x).$$

20. Es sei $K \subset \mathbb{C}$ kompakt und (f_n) eine Folge von komplexwertigen stetigen Funktionen definiert auf K, die gleichmäßig gegen eine stetige Funktion f konvergiert. Zeige, dass (f_n) gleichmäßig beschränkt und gleichgradig stetig ist. (4)

21. (a) BONUS: Es sei $(x_n) \subset \mathbb{C}$ eine Zahlenfolge. Zeige $x_n \to x$ in $(\mathbb{C}, d)$ genau dann wenn jede Teilfolge eine Teilfolge besitzt, die gegen x konvergiert. Gebe ein Beispiel für eine divergente Folge, bei der jede Teilfolge eine konvergente Teilfolge hat. (3*)

(b) BONUS: Es sei (f_n) eine gleichmäßig beschränkte und gleichgradig stetige Folge von Funktionen, die punktweise gegen f konvergiert. Zeige, dass f_n gleichmäßig gegen f konvergiert. (3*)

22. Gegeben sei die folgende Funktionenfolge (5)

$$f_N(z) = \sum_{n=3}^{N}\frac{(-1)^n}{n+z}.$$

Zeige, dass die Funktionenfolge gleichmäßig auf $D := \{z \in \mathbb{C} | 1 < |z| < 2\}$ konvergiert. Ist der Weierstraß-M-Test auf die Funktionenreihe

$$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+z}$$

anwendbar ?