Universität Ulm

Abgabe: Dienstag, 27.06.2017

Prof. Dr. Friedmar Schulz
Marius Müller
Sommersemester 2017
Punktzahl: 23

Lösungsvorschlag Elemente der Funktionentheorie: Blatt 3

~~Wir haben diese Woche einige unglaublich wichtige Konzepte kennen gelernt: Da wären Reihen und ihr~~ Konvergenzverhalten, Potenzreihen und die komplexe Exponentialfunktion sowie der komplexe Logarithmus. Ein weiteres wichtiges Tool ist der Satz von Arzéla-Ascoli, den wir später noch benötigen werden.

19. (a) Entscheide, ob folgende Logartihmusausdrücke definiert sind und berechne sie, falls definiert : $\log i, \log(-1), \log(-1-\sqrt{3}i)$ (2)

(b) Finde alle Zahlen $i^{i \log i}$. Wie viele gibt es ? (1)

(c) Wir definieren für diese Aufgabe: $\sqrt{w} = \exp\left(\frac{1}{2}\log w\right)$ für $w \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{<0}$. Zeige, dass für den Hauptzweig des Logarithmus gilt $\sqrt{w} = z_w$, wobei z_w die Zahl, die in Aufgabe 10 Blatt 1 definiert wurde, ist. (2)

Hinweis: Zeige $|\sqrt{w}| = |z_w|$ und $\arg\sqrt{w} = \arg z_w$. Um $arg(z_w)$ zu bestimmen kann vielleicht helfen dass $\arg(w+|w|) = \frac{\arg w}{2}$. Um das zu sehen kann helfen dass $1+\cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2}$ und $\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$.

Lösungsvorschlag: Man beachte, dass wir für diese Aufgabe wie vereinbart die Konvention $-\pi < \arg(z) \leq \pi$ treffen. Wir zeigen zunächst die Gleichheit der Beträge

$$|\sqrt{w}| = \exp\left(Re\frac{1}{2}\log(z)\right) = \exp\left(\frac{1}{2}\log|z|\right) = |z|^{\frac{1}{2}} = |z_w| \tag{1}$$

wobei wir $Re\log(z) = \log|z|$ und bei der letzten Gleichheit Übungsaufgabe 10 verwenden. Zeigen wir nun die Gleichheit der Argumente:

$$|\sqrt{w}| = \exp\left(\frac{1}{2}(log|w| + i\arg(w))\right) = \exp\left(\frac{\log|w|}{2} + i\frac{\arg(w)}{2}\right) = \sqrt{|w|}e^{i\frac{1}{2}\arg(w)}. \tag{2}$$

$\arg(\sqrt{w})$ ist damit $\frac{\arg(w)}{2}$. Zeigen wir das auch nochmal für z_w:

$$\arg(z_w) = \arg(w+|w|), \tag{3}$$

denn z_w ist ein reelles vielfaches von $w+|w|$. Schreibe nun $w = |w|e^{i\theta}$ mit $\theta = \arg(w)$. Dann gilt

$$\arg(w+|w|) = \arg(|w|(e^{i\theta}+1) = \arg(e^{i\theta}+1 = \arg(1+\cos\theta + i\sin\theta) \tag{4}$$

Benutzt man wie im Hinweis, dass $1+\cos\theta = 2\cos^2(\frac{\theta}{2})$ und $\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$, so erhält man

$$\arg(w+|w|) = \arg\left(2\cos\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}\right) = \frac{\theta}{2} = \frac{\arg(w)}{2} \tag{5}$$

was zu zeigen war.

(d) Zeige: $\overline{\sqrt{z}} = \sqrt{\overline{z}}$. (2)

Hinweis: Benutze $\exp(\overline{z}) = \overline{\exp(z)}$ und $\arg(\overline{z}) = -\arg(z)$, aber beides nicht unbegründet!

Lösungsvorschlag: Wieder verwenden wir hier die Konvention $-\pi < \arg(z) \leq \pi$. Begründen wir zunächst, was der Hinweis sagt: Sei $z \in \mathbb{C}$

$$\overline{\exp(z)} = \overline{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!}} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\overline{z^k}}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\overline{z}^k}{k!} = \exp(\overline{z}). \tag{6}$$

Nun falls $z = re^{i\theta}$ für $-\pi < \theta < \pi$ (Beachte: π ist ausgeschlossen, da $z \notin \mathbb{R}_{<0}$) so ist auch $-\pi < -\theta < \pi$ und

$$\overline{z} = re^{\overline{i\theta}} = re^{-i\theta} \tag{7}$$

sodass $\arg(\overline{z}) = -\theta = -\arg(z)$. Mit diesen beiden Zutaten hat man

$$\overline{\sqrt{z}} = e^{\overline{\frac{\log(z)}{2}}} = e^{\frac{\overline{\log(z)}}{2}} = e^{\frac{1}{2}\overline{(\log|z| + i\arg(z))}} = e^{\frac{1}{2}(\log|z| - i\arg(z))} = e^{\frac{1}{2}(\log|\overline{z}| + i\arg(\overline{z}))} \tag{8}$$

Und damit hat man

$$\overline{\sqrt{z}} = e^{\frac{\log\overline{z}}{2}} = \sqrt{\overline{z}}. \tag{9}$$

(e) Finde eine Potenzreihendarstellung für $f : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0} \to \mathbb{C}, f(z) := \frac{\sin\sqrt{z}}{\sqrt{z}}$ und zeige, dass sie auf dem gesamten Definitionsbereich konvergiert. Macht diese Potenzreihe auch für $z \in \mathbb{R}_{\leq 0}$ Sinn ? (2)

Hinweis: In der Vorlesung hatten wir eine Potenzreihendarstellung vom Sinus, vielleicht kann man ja damit arbeiten.

(f) Zeige $\sin(x + iy) = \sin(x)\cosh(y) + i\sinh(y)\cos(x)$. Folgere, dass $\sin(x + iy) = 0$ dann und nur dann wenn $x + iy = k\pi$ für ein $k \in \mathbb{Z}$. Finde alle komplexen Nullstellen von $\sinh : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. (3)

(g) Beweise für $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ (2)

$$\cos^n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos((n-2k)x).$$

Hinweis: Zunächst binomischer Lehrsatz. Danach noch ausnutzen dass die linke Seite auf jeden Fall reell ist!

20. Es sei $K \subset \mathbb{C}$ kompakt und (f_n) eine Folge von komplexwertigen stetigen Funktionen definiert auf K, die gleichmäßig gegen eine stetige Funktion f konvergiert. Zeige, dass (f_n) gleichmäßig beschränkt und gleichgradig stetig ist. (4)

21. (a) BONUS: Es sei $(x_n) \subset \mathbb{C}$ eine Zahlenfolge. Zeige $x_n \to x$ in $(\mathbb{C}, d)$ genau dann wenn jede Teilfolge eine Teilfolge besitzt, die gegen x konvergiert. Gebe ein Beispiel für eine divergente Folge, bei der jede Teilfolge eine konvergente Teilfolge hat. (3*)

Hinweis:Für die Rückrichtung nehme ich einen Widerspruchsbeweis: Angenommen x_n konvergiert nicht gegen x. Dann gibt es ein $\epsilon_0 > 0$ sodass es zu jedem $N \in \mathbb{N}$ ein $n_N \geq N$ gibt sodass $|x_{n_N} - x| \geq \epsilon_0$. Aus den x_{n_N}'s lässt sich sicher eine Teilfolge machen. Kann die noch eine Teilfolge haben, die gegen x konvergiert ?

(b) BONUS: Es sei (f_n) eine gleichmäßig beschränkte und gleichgradig stetige Folge von Funktionen, die punktweise gegen f konvergiert. Zeige, dass f_n gleichmäßig gegen f konvergiert. (3*)

Hinweis: Ich mache einen Widerspruch und setze erst ähnlich an wie oben. Im Laufe des Beweises nutze ich natürlich Arzela-Ascoli.

22. Gegeben sei die folgende Funktionenfolge (5)

$$f_N(z) = \sum_{n=3}^{N} \frac{(-1)^n}{n+z}.$$

Zeige, dass die Funktionenfolge gleichmäßig auf $D := \{z \in \mathbb{C} | 1 < |z| < 2\}$ konvergiert. Ist der Weierstraß-M-Test auf die Funktionenreihe

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+z}$$

anwendbar ?

Hinweis: Ich benutze das Cauchy-Kriterium. Aber wie macht man da weiter ? Als Hinweis hier vielleicht mal folgende Rechnung:

$$\left| \sum_{n=800}^{30001} \frac{(-1)^n}{n+z} \right| = \left| \sum_{n=400}^{15000} \left(\frac{1}{2n+z} - \frac{1}{2n+1+z} \right) \right| = \left| \sum_{n=400}^{15000} \frac{1}{(2n+z)(2n+1+z)} \right| \leq \sum_{n=400}^{15000} \frac{1}{(2n-2)(2n-1)} < \frac{1}{800 -}$$

wobei ich hier einmal die Summe aufgeteilt in gerade und ungerade Summanden aufgeteilt habe und einmal sowohl die Dreiecksungleichung als auch die inverse Dreiecksungleichung verwendet hab. Der geübte Leser hat bestimmt erkannt, dass ich sowas nur machen kann wenn Anfangsindex gerade und Endindex ungerade ist. Aber wenn dem nicht so ist, kann man vielleicht ein bisschen basteln.