Elemente der Funktionentheorie, Klausur 2

Sommersemester 2017, Prof. Dr. Friedmar Schulz, Marius Müller

Erlaubte Hilfsmittel: keine (im Anhang befindet sich eine kleine Formelsammlung)
Es sind **125 Punkte** erreichbar, jedoch zählen 100 Punkte als 100 Prozent. Bitte auf jedem Blatt nur eine Aufgabe bearbeiten und dokumentenechte Stifte verwenden. Falls zwei undurchgestrichene Lösungen für dieselbe Aufgabe abgegeben werden, so wird die schlechtere gewertet. Daher bitte alle Rechenwege bis auf einen sauber durchstreichen. Antworten sind stets zu begründen. Das Angabenblatt darf nach Abgabe der Klausur mit nach Hause genommen werden. Bitte nichts, was in die Wertung eingehen soll, auf das Angabenblatt schreiben!
VIEL ERFOLG!

Aufgabe 1:(5 Punkte)
Zeige: Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}(z).$$

Aufgabe 2:(10 Punkte)
Zeige: Für $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq 3$ gilt

$$\sum_{j=0}^{k-1} \cos^2\left(j\frac{2\pi}{k}\right) = \frac{k}{2}.$$

Aufgabe 3:(10+5 = 15 Punkte)
a) Finde alle komplexen Nullstellen des Polynoms $P(z) = z^5 - e^{\frac{i\pi}{4}}$.
b) Zeige, dass das Polynom

$$P(z) = z^{15} - 4z^6 + z^3 - \frac{1+i}{\sqrt{3}}$$

mindestens drei Nullstellen mit demselben Betrag besitzt.
Hinweis: Nach dem Fundamentalsatz der Algebra hat P eine Nullstelle $z_1 \in \mathbb{C}$. Zeige zunächst, dass $z_1 \neq 0$. Um an weitere Nullstellen zu kommen, multipliziere z_1 mit geeigneten Einheitswurzeln.

Aufgabe 4:[Achtung, etwas knifflig!](10 Punkte)

Berechne

$$\int_{|z-i|=3} \mathrm{Re}(z)^2 e^z \; dz.$$

Aufgabe 5:(10 Punkte)
Berechne

$$\int_{|z|=3} \frac{1}{(z^2 - i\pi z - \frac{3\pi^2}{16})^2} dz.$$

Aufgabe 6:(10 Punkte)
Berechne

$$\int_{|z-i|=2} \frac{e^{z^2}}{e^z - 1} dz.$$

Aufgabe 7: (5+7+8 = 20 Punkte)
a) Zeige, dass $|e^z| = e^{\mathrm{Re}(z)}$ für alle $z \in \mathbb{C}$.
b) Finde eine Potenzreihendarstellung von $f(z) = ze^z$. Für welche $z \in \mathbb{C}$ konvergiert diese Reihe ?
c) Finde eine Potenzreihendarstellung von $f(z) = ze^z$ um den Entwicklungspunkt $z_0 = 3i$.

Aufgabe 8: (10 Punkte)
Bestimme alle $z \in \mathbb{C}$ sodass
$$f(z) = \mathrm{Re}(z)$$
komplex differenzierbar ist.

Aufgabe 9:(8+4+3 =15 Punkte)
Anmerkung: Falls Aufgabenteil (a) nicht klappen sollte sind Aufgabenteil (b) und (c) immer noch machbar! Aufgabenteil (a) darf dann auch ohne Beweis benutzt werden!
a) Es sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph auf ganz $\mathbb{C}$. Zeige: Dann gilt
$$\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})dt = 2\pi(f(0)).$$
b) Wahr oder falsch (mit Beweis oder Gegenbeispiel): Gilt für f holomorph auf $\mathbb{C}$ auch
$$\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{Re}(f(e^{it}))dt = 2\pi \mathrm{Re}(f(0)) \quad ?$$
c) Wahr oder falsch (keine Begründung notwendig): Es sei $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ eine Kurve und $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion. Dann gilt
$$\mathrm{Re}\left(\int_\gamma f(z)dz\right) = \int_\gamma \mathrm{Re}(f(z))dz.$$

Aufgabe 10:(10 Punkte)
Berechne
$$\int_{|z|=1} \frac{1}{z}\overline{\exp(z)}dz.$$

Aufgabe 11:(5+5=10 Punkte)
Es bezeichne $\mathbb{C}_\infty$ die erweiterte komplexe Zahlenebene und S die Riemann-Sphäre, sowie $\phi : S \to \mathbb{C}_\infty$ die in der Vorlesung diskutierte bijektive Abbildung, die in der Formelsammlung gefunden werden kann. Es muss nicht gezeigt werden, dass es sich um eine bijektive Abbildung handelt.
a) Skizziere die folgende Menge

$$M := \phi^{-1}(\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Im}(z)\}).$$

Falls dir nicht einfällt, wie du die Menge skizzieren würdest, beschreibe sie mathematisch als Teilmenge von $\mathbb{R}^3$ möglichst genau (ohne Skizze sind noch 4 Punkte erreichbar)
Warnung: Der Punkt ∞ ist bei $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Im}(z)\}$ **nicht** dabei!
b) Ist M eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}^3$? (Mit Begründung)

Formelsammlung

- Cauchy'sche Integralformel (für Ableitungen). Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet für das gewisse Vorraussetzungen gelten, die hier nie überprüft werden müssen. Dazu sei f holomorph auf Ω und stetig auf $\overline{\Omega}$. Dann gilt für $z_0 \in \Omega$:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz \tag{1}$$

- Diverse Identitäten für Funktionen:

$$\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \quad (z \in \mathbb{C}). \tag{2}$$

$$\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1} \quad (z \in \mathbb{C}). \tag{3}$$

$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k} \quad (z \in \mathbb{C}). \tag{4}$$

$$\sinh(z) = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} z^{2k+1} \quad (z \in \mathbb{C}). \tag{5}$$

$$\cosh(z) = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} z^{2k} \quad (z \in \mathbb{C}). \tag{6}$$

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \quad (z \in \mathbb{C}, |z| < 1). \tag{7}$$

- Einige Identitäten für hypebolische Funktionen:

$$\cosh^2(z) - \sinh^2(z) = 1 \quad (z \in \mathbb{C}). \tag{8}$$

$$\sinh(iz) = i \sin(z) \quad (z \in \mathbb{C}). \tag{9}$$

$$\cosh(iz) = \cos(z) \quad (z \in \mathbb{C}). \tag{10}$$

- Identitäten für Summen:

$$\sum_{k=0}^{n-1} z^k = \frac{1-z^n}{1-z} \quad (z \in \mathbb{C}, z \neq 1, n \in \mathbb{N}). \tag{11}$$

$$(z_1 + z_2)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z_1^k z_2^{n-k} \quad (z_1, z_2 \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}). \tag{12}$$

- Cauchy-Riemann Differenzialgleichungen: Es sei f auf einer offenen Mengee $D \subset \mathbb{C}$ gegeben und $z_0 = x_0 + iy_0 \in D$. Definiere $u(x,y) := \mathrm{Re} f(x+iy)$ und $v(x,y) := \mathrm{Im} f(x+iy)$. Ist f bei z_0 komplex differenzierbar so gilt bei (x_0, y_0)
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{13}$$
Sind die oben genannten Ableitungen auf D stetig und erfüllen die Differenzialgleichungen bei (x_0, y_0), so kann auch gefolgert werden, dass f bei z_0 komplex differenzierbar ist.

- Wir definieren den komplexen Logarithmus wie folgt. Mit der Konvention $-\pi < \arg(z) \leq \pi$ setzen wir (mengenwertig)
$$\log(z) = \log|z| + i\arg(z) + 2\pi i n \quad (n \in \mathbb{Z}) \tag{14}$$
Den Zweig des Logarithmus, der sich für $n = 0$ ergibt nennen wir Hauptzweig des Logarithmus (und dieser definiert damit tatsächlich eine Funktion)

- Die n - ten Einheitswurzeln: Für $n \in \mathbb{N}$ gilt: Alle Lösungen der Gleichung $z^n = 1$ sind gegeben durch
$$z_j = e^{\frac{2j\pi i}{n}} \quad j = 0, ..., n-1. \tag{15}$$

- Substitutionsregel für reelle (!) Integrale. Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Dann gilt
$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)dy. \tag{16}$$

- Eine Wertetabelle für Werte des Sinus und Cosinus

x	$\sin(x)$	$\cos(x)$
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0

- Ein Paar Formeln zur Riemann'schen Zahlenkugel. Die Riemann'sche Zahlenkugel ist gegeben durch
$$S = \left\{ (\xi, \eta, \mu) \in \mathbb{R}^3 \mid \xi^2 + \eta^2 + \left(\mu - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \right\} \tag{17}$$

Insbesondere gilt für $(\xi, \eta, \mu) \in S$, dass $\xi^2+\eta^2+\mu^2 = \mu$. Wir konstruierten in der Vorlesung eine Abbildung

$$\phi : S \to \mathbb{C}_\infty \tag{18}$$

definiert durch

$$\phi(\xi, \eta, \mu) = \frac{\xi + i\eta}{1-\mu} \quad (\mu < 1) \tag{19}$$

und $\phi(0,0,1) = \infty$. Die Umkehrabbildung ist gegeben durch

$$\phi^{-1}(z) = \left(\frac{\mathrm{Re}(z)}{|z|^2+1}, \frac{\mathrm{Im}(z)}{|z|^2+1}, \frac{|z|^2}{|z|^2+1} \right) \quad (z \in \mathbb{C}) \tag{20}$$

und

$$\phi^{-1}(\infty) = (0,0,1). \tag{21}$$

Eine weitere Eigenschaft:

$$|\phi(\xi,\eta,\mu)|^2 = \frac{\mu}{1-\mu}. \tag{22}$$

- Der Residuensatz: Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und f holomorph in $\Omega \setminus E$, wobei E lediglich aus isolierten Singularitäten von f besteht. Dann gilt für jede geschlossene Kurve γ in Ω:

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_j n(\gamma, z_j) \mathrm{Res}_{z=z_j}(f(z)) \tag{23}$$

  wobei die Summe über alle Singularitäten von f läuft, die von γ umschlossen werden, $n(\gamma, z_j)$ die Windungszahl bezeichnet und $\mathrm{Res}_{z=z_j}(f(z))$ das Residuum von f bei z_j, das heißt den $-1-$*sten* Koeffizienten einer Laurentreihe von f um z_j.

- Der Cauchy'sche Integralsatz: Es sei Ω ein hinreichend glattes Gebiet und f holomorph in Ω und stetig auf $\overline{\Omega}$. Dann gilt

$$\int_{\partial\Omega} f(z)\, dz = 0.$$

- Komplexwertige partielle Ableitungen: Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen. Wir definieren für $f : \Omega \to \mathbb{C}$

$$f_x(z) = \lim_{h\to 0, h\in\mathbb{R}} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \tag{24}$$

  Sowie

$$f_y(z) = \lim_{h\to 0, h\in\mathbb{R}} \frac{f(z+ih) - f(z)}{ih} \tag{25}$$

  Damit kann man dann definieren

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}(f_x - i f_y) \tag{26}$$

und

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}(f_x + i f_y). \tag{27}$$

Die Erfülltheit der Cauchy Riemannschen Differentialgleichungen in einem Gebiete G ist äquivalent zu $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$ in dem Gebiet $\widetilde{G} := \{x+iy|(x,y) \in G\}$.

- Der Laplace Operator: Ist $G \subset \mathbb{R}^2$ offen $u : G \to \mathbb{R}$ eine auf G zweimal differenzierbare Funktion so heißt

$$\Delta u := u_{xx} + u_{yy} \tag{28}$$

der Laplace-Operator von u. Zweimal stetig differenzierbare Funktionen, die den Laplace-Operator annulieren, heißen harmonisch. Ist f holomorph auf G, so annulieren $u(x,y) := \mathrm{Re} f(x+iy)$ und $v(x,y) := \mathrm{Im} f(x+iy)$ den Laplace-Operator auf $\widetilde{G} := \{(x,y)|x+iy \in G\}$.