Elemente der Funktionentheorie, Klausur 2

Sommersemester 2017, Prof. Dr. Friedmar Schulz, Marius Müller

Erlaubte Hilfsmittel: keine (im Anhang befindet sich eine kleine Formelsammlung)
Es sind **125 Punkte** erreichbar, jedoch zählen 100 Punkte als 100 Prozent. Bitte auf jedem Blatt nur eine Aufgabe bearbeiten und dokumentenechte Stifte verwenden. Falls zwei undurchgestrichene Lösungen für dieselbe Aufgabe abgegeben werden, so wird die schlechtere gewertet. Daher bitte alle Rechenwege bis auf einen sauber durchstreichen. Antworten sind stets zu begründen. Das Angabenblatt darf nach Abgabe der Klausur mit nach Hause genommen werden. Bitte nichts, was in die Wertung eingehen soll, auf das Angabenblatt schreiben!
VIEL ERFOLG!

Aufgabe 1:(5 Punkte)
Zeige: Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}(z).$$

Lösung: Es sei $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$. Insbesondere ist dann $x = \mathrm{Re}(z)$. Dann gilt:

$$z + \overline{z} = x + iy + (x - iy) = 2x = 2\mathrm{Re}(z).$$

Aufgabe 2:(10 Punkte)
Zeige: Für $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq 3$ gilt

$$\sum_{j=0}^{k-1} \cos^2\left(j\frac{2\pi}{k}\right) = \frac{k}{2}.$$

Lösung:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{k-1} \cos^2\left(j\frac{2\pi}{k}\right) &= \sum_{j=0}^{k-1}\left(\frac{e^{\frac{2\pi ij}{k}}+e^{\frac{-2\pi ij}{k}}}{2}\right)^2\\
&= \frac{1}{4}\sum_{j=0}^{k-1}\left(e^{\frac{2\pi ij}{k}}+e^{\frac{-2\pi ij}{k}}\right)^2\\
&= \frac{1}{4}\sum_{j=0}^{k-1}(e^{\frac{2\pi ij}{k}})^2+2e^{\frac{2\pi ij}{k}}e^{\frac{-2\pi ij}{k}}+(e^{\frac{-2\pi ij}{k}})^2\\
&= \frac{1}{4}\sum_{j=0}^{k-1}e^{\frac{4\pi ij}{k}}+2+e^{\frac{-4\pi ij}{k}}\\
&= \frac{1}{4}\sum_{j=0}^{k-1}\left((e^{\frac{4\pi i}{k}})^j+2+(e^{\frac{-4\pi i}{k}})^j\right)\\
&= \frac{1}{4}\left(\sum_{j=0}^{k-1}(e^{\frac{4\pi i}{k}})^j+\sum_{j=0}^{k-1}2+\sum_{j=0}^{k-1}(e^{\frac{-4\pi i}{k}})^j\right)\\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{1-(e^{\frac{4\pi i}{k}})^k}{1-e^{\frac{4\pi i}{k}}}+2k+\frac{1-(e^{\frac{-4\pi i}{k}})^k}{1-e^{\frac{-4\pi i}{k}}}\right)\\
&= \frac{1}{4}(0+2k+0)=\frac{k}{2}
\end{aligned}$$

Aufgabe 3:(10+5 = 15 Punkte)
a) Finde alle komplexen Nullstellen des Polynoms $P(z) = z^5 - e^{\frac{i\pi}{4}}$.
Lösung: $z^5 - e^{\frac{i\pi}{4}} = 0$ ist äquivalent zu $z^5 = e^{\frac{i\pi}{4}}$. Die Lösungen dieser Gleichung lassen sich mithilfe der komplexen Wurzeln bestimmen. Mit der Formel erhalten wir

$$z_k = \sqrt[5]{|e^{\frac{i\pi}{4}}|}e^{\frac{i\arg e^{\frac{i\pi}{4}}+2k\pi i}{5}} = e^{\frac{i\frac{\pi}{4}+2k\pi i}{5}} \quad k = 0,..,4$$

b) Zeige, dass das Polynom

$$P(z) = z^{15} - 4z^6 + z^3 - \frac{1+i}{\sqrt{3}}$$

mindestens drei Nullstellen mit demselben Betrag besitzt.
Lösung: Nach dem Fundamentalsatz der Algebra besitzt P eine Nullstelle z_1. Es sei $R = |z_1|$. Sicherlich ist $R \neq 0$ denn $P(0) = -\frac{1+i}{\sqrt{3}} \neq 0$. Wir behaupten, dass es zwei weitere von z_1 verschiedene Nullstellen vom Betrage R gibt. Es sei $\zeta_1 = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ und $\zeta_2 = e^{\frac{4\pi i}{3}}$. Es gilt dann $\zeta_1^3 = \zeta_2^3 = 1$. Nun betrachten wir für

$i = 1, 2$

$$P(\zeta_i z_1) = (\zeta_i z_1)^{15} - 4(\zeta_i z_1)^6 + (\zeta_i z_1)^3 - \frac{1+i}{\sqrt{3}} = \zeta_i^{15} z_1^{15} - 4\zeta_i^6 z_1^6 + \zeta_i^3 z_1^3 - \frac{1+i}{\sqrt{3}}.$$

Da $15, 6$ und 3 allesamt durch 3 teilbar sind, gilt $\zeta_i^{15} = \zeta_i^6 = \zeta_i^3 = 1$ und damit hat man

$$P(\zeta_i z_1) = z_1^{15} - 4z_1^6 + z_1^3 - \frac{1+i}{\sqrt{3}} = P(z_1) = 0$$

Damit sind $z_1, \zeta_1 z_1, \zeta_2 z_1$ Nullstellen von P. Wir zeigen noch, dass alle diese Zahlen vom Betrage R und veschieden sind. Dazu: $|\zeta_i z_1| = |\zeta_|| z_1| = |z_1| = R$ und da $z_1 \neq 0$ und $1, \zeta_1, \zeta_2$ alle paarweise veschieden sind folgt auch die Paarweise Veschiedenheit der Nullstellen.

Aufgabe 4:(10 Punkte)

Berechne
$$\int_{|z-i|=3} \mathrm{Re}(z)^2 e^z \, dz.$$

Lösung: Hier gibt es im Wesentlichen zwei Wege. Einen eleganten und einen offensichtlicheren, aber etwas längeren. Wir zeigen de eleganten und erklären unten noch den anderen:

$$\begin{aligned}
\int_{|z-i|=3} \mathrm{Re}(z)^2 e^z dz &= \int_{|z-i|=3} \mathrm{Re}(z-i)^2 e^z dz \\
&= \int_{|z-i|=3} \left(\frac{z-i+\overline{z-i}}{2}\right)^2 e^z dz \\
&= \int_{|z-i|=3} \frac{1}{4}\left((z-i)^2 + 2(z-i)\overline{z-i} + (\overline{z-i})^2\right) e^z dz \\
&= \frac{1}{4}\left(\int_{|z-i|=3} (z-i)^2 e^z dz + \int_{|z-i|=3} 2(z-i)\overline{z-i} e^z dz + \int_{|z-i|=3} (\overline{z-i})^2 e^z dz\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(0 + \int_{|z-i|=3} 18 e^z dz + \int_{|z-i|=3} (\overline{z-i})^2 e^z dz\right) \\
&= \frac{1}{4}\int_{|z-i|=3} \left(\frac{9}{z-i}\right)^2 e^z dz \\
&= \frac{1}{4}\int_{|z-i|=3} \frac{81}{(z-i)^2} e^z dz \\
&= \frac{81}{4} 2\pi i \frac{d}{dz}_{|z=i} e^z = \frac{81}{2}\pi i e^i
\end{aligned}$$

Die Idee, $\mathrm{Re}(z)$ als $\mathrm{Re}(z-i)$ umzuschreiben, macht diesen Lösungsweg sehr elegant. Man hätte aber auch gleich $\mathrm{Re}(z) = \frac{z+\overline{z}}{2}$ benutzen können, dann ausquadireren können und für alle Terme mit $\overline{z}$ dann genauso verfahren können wie in Aufgabe 4(c) auf der ersten Klausur.

Aufgabe 5:(10 Punkte)

Berechne
$$\int_{|z|=3} \frac{1}{(z^2 - i\pi z - \frac{3\pi^2}{16})^2} dz.$$

Lösung: Bestimmen wir zunächst die Nullstellen des Nenners:

$$\begin{aligned}
z^2 - i\pi z + \frac{3\pi^2}{16} &= \left(z - \frac{i\pi}{2}\right)^2 - \frac{3\pi^2}{16} - \left(\frac{i\pi}{4}\right)^2 \\
&= \left(z - \frac{i\pi}{2}\right)^2 + \frac{\pi^2}{16}
\end{aligned}$$

Setzen wir diesen Term gleich Null so erhalten wir $z_1 = \frac{i\pi}{2} + \frac{i\pi}{4} = \frac{3\pi i}{4}$ und $z_2 = \frac{i\pi}{2} - \frac{i\pi}{4} = \frac{\pi i}{4}$. Man beachte, dass $|z_2| = \left|\frac{3\pi i}{4}\right| = 3\frac{\pi}{4} < 3$ da $\pi < 4$. Damit liegen z_1 und z_2 im Inneren der Integrationskurve. Mit den üblichen Techniken (siehe Aufgabe 6 der ersten Klausur) finden wir

$$\begin{aligned}
\int_{|z|=3} \frac{1}{(z^2 - i\pi z - \frac{3\pi^2}{16})^2} dz &= \int_{|z|=3} \frac{1}{(z-\frac{\pi i}{4})^2(z-\frac{3\pi i}{4})^2} dz \\
&= \int_{|z-\frac{i\pi}{4}|=0.1} \frac{1}{(z-\frac{\pi i}{4})^2(z-\frac{3\pi i}{4})^2} dz + \int_{|z-\frac{3\pi i}{4}|=0.1} \frac{1}{(z-\frac{\pi i}{4})^2(z-\frac{3\pi i}{4})^2} dz \\
&= 2\pi i \frac{d}{dz}\Big|_{z=\frac{i\pi}{4}} \left(\frac{1}{(z-\frac{3\pi i}{4})^2}\right) + 2\pi i \frac{d}{dz}\Big|_{z=\frac{3i\pi}{4}} \left(\frac{1}{(z-\frac{\pi i}{4})^2}\right) \\
&= 2\pi i \left(\frac{-2}{(\frac{\pi i}{4} - \frac{3\pi i}{4})^3}\right) + 2\pi i \left(\frac{-2}{(\frac{3\pi i}{4} - \frac{\pi i}{4})^3}\right) = 0
\end{aligned}$$

weil der zweite Summand offensichtlich das Negative des ersten Summands ist.

Aufgabe 6:(10 Punkte)
Berechne

$$\int_{|z-i|=2} \frac{e^{z^2}}{e^z - 1} dz.$$

Lösung: Wir schreiben, wie bereits in den Übungen gesehen um:

$$\int_{|z-i|=2} \frac{e^{z^2}}{e^z-1} dz = \int_{|z-i|=2} \frac{1}{z} e^{z^2} \frac{z}{e^z-1} dz$$

Wir definieren nun für $z \in \overline{D(i;2)}$

$$f(z) := \begin{cases} \frac{z}{e^z-1} & z \neq 0 \\ 1 & z = 0 \end{cases}$$

Wir zeigen, dass f holomorph ist. In $\overline{D(i;2) \setminus \{0\}}$ ist f sicherlich holomorph, da alle Nullstellen von $e^z - 1$ außer $z = 0$ nicht in $\overline{D(i,2)}$ liegen (schließlich gilt für $k \in \mathbb{Z}, k \neq 0$ $|2k\pi i - i| = |2k\pi - 1| > 2$. Wir zeigen nun, dass f auch in einer Umgebung von der Null holomorph ist. Dazu:

$$\frac{z}{e^z-1} = \frac{z}{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} - 1} = \frac{1}{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{k-1}}{k!}} = \frac{1}{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+1)!}}.$$

Nun ist $g(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+1)!}$ holomorph auf $\mathbb{C}$ und nimmt bei 0 den Wert $\frac{1}{1!} = 1$ an. Daher ist $\frac{1}{g}$ holomorph in einer Umgebung von Null und in dieser Umgebung gilt

$$f = \frac{1}{g}.$$

Nun gilt

$$\int_{|z-i|=2} \frac{e^{z^2}}{e^z - 1} dz = \int_{|z-i|=2} \frac{1}{z} e^{z^2} f(z) dz = 2\pi i e^{0^2} f(0) = 2\pi i$$

Aufgabe 7: (5+8+7 = 20 Punkte)
a) Zeige, dass $|e^z| = e^{\mathrm{Re}(z)}$ für alle $z \in \mathbb{C}$.
Lösung: Es sei $z = x + iy$ wobei $x.y \in \mathbb{R}$. Dann ist insbesondere $x = \mathrm{Re}(z)$ und es gilt

$$|e^z| = |e^{x+iy}| = |e^x e^{iy}| = e^x |e^{iy}| = e^x |\cos(y) + i\sin(y)| = e^x \sqrt{\cos^2(y) + \sin^2(y)} = e^x = e^{\mathrm{Re}(z)}$$

b) Finde eine Potenzreihendarstellung von $f(z) = ze^z$. Wo konvergiert diese ?
Lösung:

$$f(z) = ze^z = z \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k+1}}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{(k-1)!}.$$

Die Reihe konvergiert für alle $z \in \mathbb{C}$, da dies bereits die Exponentialreihe tut (und konvergente Folgen, die mit einer konstanten multipliziert werden immer noch konvergent sind).
c) Finde eine Potenzreihendarstellung von $f(z) = ze^z$ um den Entwicklungspunkt $z_0 = 3i$.

$$\begin{aligned} f(z) &= ze^z = e^{z-3i+3i} = e^{3i} z e^{z-3i} \\ &= e^{3i}(z-3i)e^{z-3i} + 3ie^{3i}e^{z-3i} \\ &= e^{3i}(z-3i) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z-3i)^k}{k!} + 3ie^{3i} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z-3i)^k}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{3i}}{k!}(z-3i)^{k+1} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3ie^{3i}}{k!}(z-3i)^k \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{3i}}{(k-1)!}(z-3i)^k + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3ie^{3i}}{k!}(z-3i)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-3i)^k \end{aligned}$$

wobei

$$a_k = \begin{cases} 3ie^{3i} & k = 0 \\ \frac{e^{3i}}{(k-1)!} + \frac{3ie^{3i}}{k!} & k > 0 \end{cases}.$$

Aufgabe 8: (10 Punkte)
Bestimme alle $z \in \mathbb{C}$ sodass

$$f(z) = \mathrm{Re}(z)$$

komplex differenzierbar ist.
Lösung: Wir versuchen, die Cauchy-Riemannschen Differenzialgleichungen nachzuprüfen: Hierzu bestimmen wir für $x, y \in \mathbb{R}$

$$u(x, y) = \mathrm{Re}f(x + iy) = \mathrm{Re}(\mathrm{Re}(x + iy)) = \mathrm{Re}(x) = x$$

und

$$v(x, y) = \mathrm{Im}f(x + iy) = \mathrm{Im}(\mathrm{Re}(x + iy)) = \mathrm{Im}(x) = 0$$

Nun gilt $u_x(x, y) \equiv 1$ und $v_y(x, y) \equiv 0$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Deswegen kann die erste Cauchy-Riemannsche Differenzialgleichung nirgends erfüllt sein und f is damit nirgends holomorph.

Aufgabe 9:(8+4+3=15 Punkte)
a) Es sei f holomorph auf $\mathbb{C}$. Zeige: Dann gilt

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})dt = 2\pi(f(0)).$$

Lösung:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})\frac{ie^{it}}{ie^{it}}dt = \frac{1}{i}\int_{|z|=1} f(z)\frac{1}{z}dz = \frac{1}{i}2\pi i f(0) = 2\pi f(0).$$

b) Wahr oder falsch (mit Beweis oder Gegenbeispiel): Gilt für f holomorph auf $\mathbb{C}$ auch

$$\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{Re}(f)(e^{it})dt = 2\pi\mathrm{Re}(f)(0) \quad ?$$

Man hätte auch die Mittelwerteigenschaft von f im Satz 5.2.3 aus dem Skript verwenden dürfen. (Die Herleitung hier ist eigentlich dieselbe im Spezialfall $r = 1$ und $z_0 = 0$.)
Lösung: Die Aussage ist wahr. Hier ist der Beweis:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{Re}(f)(e^{it})dt = \mathrm{Re}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})dt\right) = \mathrm{Re}(2\pi f(0)) = 2\pi\mathrm{Re}(f)(0)$$

c) Wahr oder falsch (keine Begründung notwendig): Es sei $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}$ eine Kurve und $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion. Dann gilt

$$\mathrm{Re}\left(\int_\gamma f(z)dz\right) = \int_\gamma \mathrm{Re}(f)(z)dz.$$

Lösung: Falsch.

Aufgabe 10:(10 Punkte)
Berechne
$$\int_{|z|=1} \frac{1}{z}\overline{\exp(z)}dz.$$

Lösung:

$$\begin{aligned}
\int_{|z|=1} \frac{1}{z}\overline{\exp(z)}dz &= \int_{|z|=1} \frac{1}{z}\exp(\overline{z}) = \int_{|z|=1} \frac{1}{z}\exp(\frac{|z|^2}{z}) \\
&= \int_{|z|=1} \frac{1}{z}e^{\frac{1}{z}}dz = \int_{-\pi}^{\pi} e^{e^{-it}}i \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} e^{e^{-it}}\frac{ie^{-it}}{e^{-it}} = -\int_{-\pi}^{\pi} e^{e^{-it}}\frac{1}{e^{-it}}(-ie^{-it})dt = -\int_{\gamma}\frac{1}{z}e^{z}dz
\end{aligned}$$

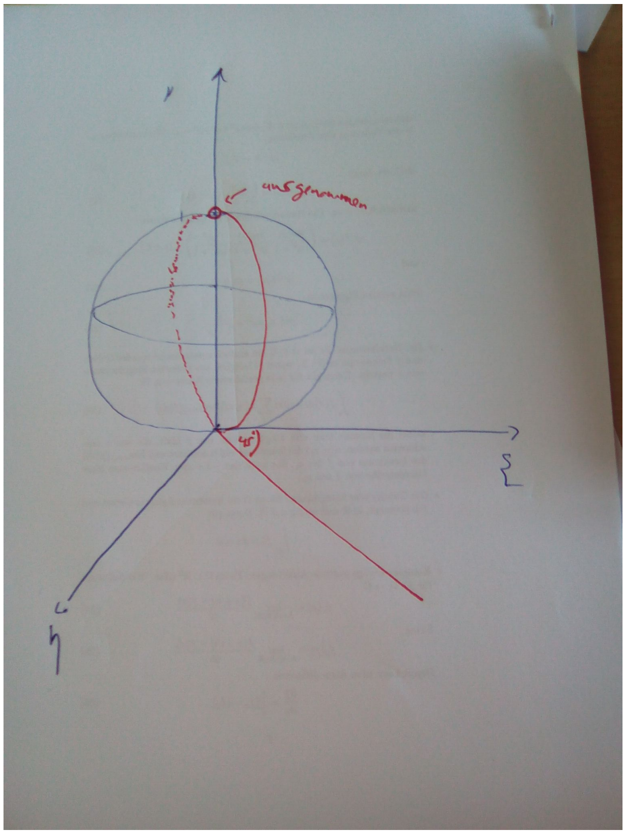
wobei γ eine Kurve ist, die den Einheitskreis im Uhrzeigersinn durchläuft. Invertieren wir die Richtung, so absorbieren wir das negative Vorzeichen und erhalten
$$\int_{|z|=1} \frac{1}{z}\overline{\exp(z)}dz = \int_{|z|=1} \frac{e^z}{z}dz = 2\pi i e^0 = 2\pi i$$

Aufgabe 11:(5+5=10 Punkte)
Es bezeichne $\mathbb{C}_\infty$ die erweiterte komplexe Zahlenebene und S die Riemann-Sphäre, sowie $\phi : S \to \mathbb{C}_\infty$ die in der Vorlesung diskutierte bijektive Abbildung, die in der Formelsammlung gefunden werden kann. Es muss nicht gezeigt werden, dass es sich um eine bijektive Abbildung handelt.
Skizziere die folgende Menge
$$M := \phi^{-1}(\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Im}(z)\}).$$

Lösung: Es sei $A := \{z \in \mathbb{C} | \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Im}(z)\}$ Da $A \subset \mathbb{C}$

$$\begin{aligned}
M &= \{(\zeta,\eta,\mu) : \mu < 1, \mathrm{Re}(\phi(\zeta,\eta,\mu)) = \mathrm{Im}(\phi(\zeta,\eta,\mu))\} \\
&= \{(\zeta,\eta,\mu) : \mu < 1, \frac{\zeta}{1-\mu} = \frac{\eta}{1-\mu}\} \\
&= \{(\zeta,\eta,\mu) : \mu < 1, \zeta = \eta\}
\end{aligned}$$

Die Zeichnung sollte den Schnitt der Sphäre mit der Ebene mit Gleichung $\zeta - \eta = 0$ sein, wobei jedoch der Punkt $(0,0,1)$ fehlt. Eine gültige Skizze sieht also in etwa so aus:



b) Ist M eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}^3$? (mit Begründung)
Lösung: Man beachte, dass $(a_n) = (\frac{1}{\sqrt{2}}\sin(\frac{1}{n}), \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(\frac{1}{n}), \cos(\frac{1}{n}))$ eine Folge in M definiert, deren Grenzwert in $\mathbb{R}^3$, nämlich $(0,0,1)$ nicht in M liegt.

Formelsammlung

- Cauchy'sche Integralformel (für Ableitungen). Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet für das gewisse Vorraussetzungen gelten, die hier nie überprüft werden müssen. Dazu sei f holomorph auf Ω und stetig auf $\overline{\Omega}$. Dann gilt für $z_0 \in \Omega$:
$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \tag{1}$$

- Diverse Identitäten für Funktionen:
$$\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \quad (z \in \mathbb{C}). \tag{2}$$
$$\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1} \quad (z \in \mathbb{C}). \tag{3}$$
$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k} \quad (z \in \mathbb{C}). \tag{4}$$
$$\sinh(z) = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} z^{2k+1} \quad (z \in \mathbb{C}). \tag{5}$$
$$\cosh(z) = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} z^{2k} \quad (z \in \mathbb{C}). \tag{6}$$
$$\frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \quad (z \in \mathbb{C}, |z| < 1). \tag{7}$$

- Einige Identitäten für hyperbolische Funktionen:
$$\cosh^2(z) - \sinh^2(z) = 1 \quad (z \in \mathbb{C}). \tag{8}$$
$$\sinh(iz) = i \sin(z) \quad (z \in \mathbb{C}). \tag{9}$$
$$\cosh(iz) = \cos(z) \quad (z \in \mathbb{C}). \tag{10}$$

- Identitäten für Summen:
$$\sum_{k=0}^{n-1} z^k = \frac{1 - z^n}{1 - z} \quad (z \in \mathbb{C}, z \neq 1, n \in \mathbb{N}). \tag{11}$$
$$(z_1 + z_2)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z_1^k z_2^{n-k} \quad (z_1, z_2 \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}). \tag{12}$$

- Cauchy-Riemann Differenzialgleichungen: Es sei f auf einer offenen Mengee $D \subset \mathbb{C}$ gegeben und $z_0 = x_0 + iy_0 \in D$. Definiere $u(x,y) := \mathrm{Re} f(x+iy)$ und $v(x,y) := \mathrm{Im} f(x+iy)$. Ist f bei z_0 komplex differenzierbar so gilt bei (x_0, y_0)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{13}$$

  Sind die oben genannten Ableitungen auf D stetig und erfüllen die Differenzialgleichungen bei (x_0, y_0), so kann auch gefolgert werden, dass f bei z_0 komplex differenzierbar ist.

- Wir definieren den komplexen Logarithmus wie folgt. Mit der Konvention $-\pi < \arg(z) \leq \pi$ setzen wir (mengenwertig)

$$\log(z) = \log|z| + i\arg(z) + 2\pi i n \quad (n \in \mathbb{Z}) \tag{14}$$

  Den Zweig des Logarithmus, der sich für $n = 0$ ergibt nennen wir Hauptzweig des Logarithmus (und dieser definiert damit tatsächlich eine Funktion)

- Die n - ten Einheitswurzeln: Für $n \in \mathbb{N}$ gilt: Alle Lösungen der Gleichung $z^n = 1$ sind gegeben durch

$$z_j = e^{\frac{2j\pi i}{n}} \quad j = 0, ..., n-1. \tag{15}$$

- Substitutionsregel für reelle (!) Integrale. Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Dann gilt

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)dy. \tag{16}$$

- Eine Wertetabelle für Werte des Sinus und Cosinus

x	$\sin(x)$	$\cos(x)$
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0

- Ein Paar Formeln zur Riemann'schen Zahlenkugel. Die Riemann'sche Zahlenkugel ist gegeben durch

$$S = \left\{ (\xi, \eta, \mu) \in \mathbb{R}^3 \mid \xi^2 + \eta^2 + \left(\mu - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \right\} \tag{17}$$

Insbesondere gilt für $(\xi,\eta,\mu)\in S$, dass $\xi^2+\eta^2+\mu^2=\mu$. Wir konstruierten in der Vorlesung eine Abbildung

$$\phi : S \to \mathbb{C}_\infty \tag{18}$$

definiert durch

$$\phi(\xi,\eta,\mu)=\frac{\xi+i\eta}{1-\mu}\quad(\mu<1) \tag{19}$$

und $\phi(0,0,1)=\infty$. Die Umkehrabbildung ist gegeben durch

$$\phi^{-1}(z)=\left(\frac{\mathrm{Re}(z)}{|z|^2+1},\frac{\mathrm{Im}(z)}{|z|^2+1},\frac{|z|^2}{|z|^2+1}\right)\quad(z\in\mathbb{C}) \tag{20}$$

und

$$\phi^{-1}(\infty)=(0,0,1). \tag{21}$$

Eine weitere Eigenschaft:

$$|\phi(\xi,\eta,\mu)|^2=\frac{\mu}{1-\mu}. \tag{22}$$

- Der Residuensatz: Es sei $\Omega\subset\mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und f holomorph in $\Omega\setminus E$, wobei E lediglich aus isolierten Singularitäten von f besteht. Dann gilt für jede geschlossene Kurve γ in Ω:

$$\int_\gamma f(z)dz=2\pi i\sum_j n(\gamma,z_j)\mathrm{Res}_{z=z_j}(f(z)) \tag{23}$$

wobei die Summe über alle Singularitäten von f läuft, die von γ umschlossen werden, $n(\gamma,z_j)$ die Windungszahl bezeichnet und $\mathrm{Res}_{z=z_j}(f(z))$ das Residuum von f bei z_j, das heißt den $-1-sten$ Koeffizienten einer Laurentreihe von f um z_j.

- Der Cauchy'sche Integralsatz: Es sei Ω ein hinreichend glattes Gebiet und f holomorph in Ω und stetig auf $\overline{\Omega}$. Dann gilt

$$\int_{\partial\Omega} f(z)\,dz=0.$$

- Komplexwertige partielle Ableitungen: Es sei $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ offen. Wir definieren für $f:\Omega\to\mathbb{C}$

$$f_x(z)=\lim_{h\to0,h\in\mathbb{R}}\frac{f(z+h)-f(z)}{h} \tag{24}$$

Sowie

$$f_y(z)=\lim_{h\to0,h\in\mathbb{R}}\frac{f(z+ih)-f(z)}{ih} \tag{25}$$

Damit kann man dann definieren

$$\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{1}{2}(f_x-if_y) \tag{26}$$

und

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}(f_x + if_y). \tag{27}$$

Die Erfülltheit der Cauchy Riemannschen Differentialgleichungen in einem Gebiete G ist äquivalent zu $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ in dem Gebiet $\widetilde{G} := \{x+iy|(x,y) \in G\}$.

- Der Laplace Operator: Ist $G \subset \mathbb{R}^2$ offen $u : G \to \mathbb{R}$ eine auf G zweimal differenzierbare Funktion so heißt

$$\Delta u := u_{xx} + u_{yy} \tag{28}$$

der Laplace-Operator von u. Zweimal stetig differenzierbare Funktionen, die den Laplace-Operator annulieren, heißen harmonisch. Ist f holomorph auf G, so annulieren $u(x,y) := \mathrm{Re} f(x+iy)$ und $v(x,y) := \mathrm{Im} f(x+iy)$ den Laplace-Operator auf $\widetilde{G} := \{(x,y)|x+iy \in G\}$.