Universität Ulm
Abgabe: Dienstag, 04.07.2017

Prof. Dr. Friedmar Schulz
Marius Müller
Sommersemester 2017
Punktzahl: 24

Übungen Elemente der Funktionentheorie: Blatt 4

23. (a) Beweise, dass $f(z) = \overline{z}$ nirgends komplex differenzierbar ist. (2)

(b) Bestimme alle Punkte $z \in \mathbb{C}$ an denen $f(z) = z^3 + |z|^2$ komplex differenzierbar ist (3)

24. Es sei $D \subset \mathbb{C}$ offen und $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ holomorph auf D. Definiere für (x, y) sodass $x + iy \in D$ $u(x, y) = Re(f(x + iy))$ und $v(x, y) = Im(f(x + iy))$.

(a) Sind u und v zweimal stetig partiell differenzierbar auf D, so ist $u_{xx} + u_{yy} = 0$. Man sagt, dass u harmonisch ist. (3)

(b) Der Einfachheit halber nehmen wir für diese Aufgabe $D = \mathbb{C}$ an. Definiere $g(r, \theta) := u(re^{i\theta})$ und $h(r, \theta) = v(re^{i\theta})$ für $r > 0$ und $\theta \in \mathbb{R}$. Zeige, dass stets gilt (3)

$$g_r = \frac{1}{r} h_\theta, \quad h_r = -\frac{1}{r} g_\theta$$

(c) Es sei $G \subset D$ ein Gebiet, sodass $|f(z)| = const$ für alle $z \in G$. Zeige: f ist konstant auf G. (3)

25. (a) Berechne für $r > 0$ (2)

$$\int_{|z|=r} \overline{z}\, dz, \quad \int_{|z|=r} \frac{1}{z^2} dz,$$

(b) Es sei E eine Ellipse, mit kleiner Halbachse der Länge a und großer Halbachse der Länge b, die von der Kurve γ_E gegen den Uhrzeigersinn durchlaufen wird. Bestimme (ohne Benutzung von Integralformeln sondern nur mit der Parametrisierung) (2)

$$\int_{\gamma_E} \frac{1}{|z|} dz.$$

(c) Diese Aufgabe ist die Hauptrechtfertigung dafür, dass Kurvenintegrale nicht von der Parametrisierung der Kurve, bzw. von der „Geschwindigkeit "mit der die Kurve durchlaufen wird, abhängen. Es sei $\phi : [0, 1] \to [0, 1]$ bijektiv und stetig differenzierbar mit $\phi'(x) > 0$ für alle $x \in (0, 1)$ und $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}$ eine stetig differenzierbare Kurve. Definiere $\widetilde{\gamma}(t) := \gamma(\phi(t))$ für alle $t \in [0, 1]$. Zeige, dass für jede stetige Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gilt (1)

$$\int_\gamma f dz = \int_{\widetilde{\gamma}} f dz$$

(d) Beweise: Für $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $|x_0| < 1$ gilt (2)

$$\int_{|z|=1} \frac{\overline{z}}{z - x_0} dz = \int_{|z|=1} \frac{1}{1 - x_0 z}.$$

(e) Es sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ stetig sodass es ein komplex diffenziebares g gibt mit $g' = f$. Zeige: Dann ist (2)

$$\int_\gamma f dz = 0$$

für jede geschlossene Kurve $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$.

(f) Es sei für $R > 2$ γ_R die Kurve, die zuerst eine gerade Stecke von $-R + 0i$ nach $R + 0i$ durchläuft, und dann auf einem Halbkreis oberhalb der x- Achse zurückläuft. Zeige, dass für $n \in \mathbb{N}$, n gerade,$n \geq 2$ gilt (3+2*)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-x}}{1 + x^n} dx = \lim_{R \to \infty} \int_{\gamma_R} \frac{e^{-z}}{1 + z^n} dz$$

Bonus: Gebe eine Familie von geschlossenen(!) Kurven γ_R an, sodass

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{1 + x^n} dx = \lim_{R \to \infty} \int_{\gamma_R} \frac{e^z}{1 + z^n} dz.$$

Übungsblätter sowie aktuelle Informationen unter
`https://www.uni-ulm.de/mawi/analysis/lehre/veranstaltungen/sose2017/elemente-der-funktionentheorie/`