Elemente der Funktionentheorie, Probeklausur

Granted auxiliary devices: none (attached is a list of formulas)
You can achieve **120 Points**, though 100 points count as full credit. Start a new sheet of paper for every problem. If you turn in two solutions, none of which is noticeably crossed out, we will give credit for the worse of them. Hence make sure to cross out all of your solutions except for one. Every answer is got to be justified. You can take the worksheet home after you finished, so please don't write you solutions on this sheet!
VIEL ERFOLG!

Aufgabe 1:(10 Punkte)
Show that for all $z \in \mathbb{C}$

$$\cos^3(z) = \frac{\cos(3z) + 3\cos(z)}{4}.$$

Aufgabe 2:(10 Punkte)
Show: For $k \in \mathbb{N}$ such that $k \geq 2$:

$$\sum_{j=0}^{k-1} \sin\left(j\frac{2\pi}{k}\right) = 0.$$

Aufgabe 3:(10 Punkte)
Compute all branches of the complex logartihm of $1+i$ and sketch at least three of them in the complex plane.

Aufgabe 4: (10 Punkte)
Compute

$$\int_{|z|=1} \frac{1}{z^3(z^2+5)} dz.$$

Aufgabe 5: (10 Punkte)
Show

$$\int_{|z|=1} \frac{e^z}{\overline{z}} = 0.$$

Aufgabe 6: (10 Punkte)
Compute

$$\int_{|z|=7} \frac{\sin(z)}{z^2 - 5z + 4} dz.$$

Aufgabe 7:(10+10 = 20 Punkte)
a) Show, that $-i \sinh(iz) = \sin(z)$ holds for all $z \in \mathbb{C}$.
b) Compute a power series, the restriction of which on $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ coincides with

$$f(z) := \frac{\sinh(z)}{z} \quad (z \in \mathbb{C} \setminus \{0\})$$

Does f possess an analytic continuation on $\mathbb{C}$?[This answer doesn't need to be justified.] If so, compute the derivative of this contiuation at $z = 0$.

Aufgabe 8:(10 Punkte)
Find all $z \in \mathbb{C}$ such that

$$f(z) = \overline{z} e^{-z}$$

is complex differentiable at z.

Aufgabe 9: (10 Punkte)
Show that the given series of functions converges uniformly on the annulus $D := \{z \in \mathbb{C} | 1 < |z| < 2\}$

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^2 + z^2}.$$

Aufgabe 10: (10 Punkte) [Caution, difficult]
Compute

$$\int_{|z|=1} \frac{1}{\sin^2(z)} dz.$$

Aufgabe 11:(5+5=10 Punkte)
Consider the metric space $\mathbb{C}_\infty$ endowed with the spherical distance

$$\chi_2(z_1, z_2) := \begin{cases} \frac{|z_1 - z_2|}{\sqrt{1+|z_1|^2}\sqrt{1+|z_2|^2}} & z_1, z_2 \neq \infty \\ \frac{1}{\sqrt{1+|z_1|^2}} & z_2 = \infty, z_1 \neq \infty \\ \frac{1}{\sqrt{1+|z_2|^2}} & z_2 \neq \infty, z_1 = \infty \\ 0 & z_1 = z_2 = \infty \end{cases}$$

You can use without proof that χ_2 indeed defines a metric on $\mathbb{C}_\infty$
a) Let be $(w_n) \subset \mathbb{C}$ a sequence and $w \in \mathbb{C}$ such that $|w_n - w| \to 0$. Show: $\chi_2(w_n, w) \to 0$ as $n \to \infty$.
b) Show that a bounded sequence $(w_n) \subset \mathbb{C}$ cannot possess a subsequence satisfying $\chi_2(w_n, \infty) \to 0$ as $n \to \infty$.

Formelsammlung

- Cauchy'sche Integralformel (für Ableitungen). Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet für das gewisse Vorraussetzungen gelten, die hier nie überprüft werden müssen. Dazu sei f holomorph auf Ω und stetig auf $\overline{\Omega}$. Dann gilt:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \tag{1}$$

- Diverse Identitäten für Funktionen:

$$\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \quad (z \in \mathbb{C}) \tag{2}$$

$$\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1} \quad (z \in \mathbb{C}) \tag{3}$$

$$\cos(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k} \quad (z \in \mathbb{C}) \tag{4}$$

$$\sinh(z) = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} z^{2k+1} \quad (z \in \mathbb{C}) \tag{5}$$

$$\cosh(z) = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} z^{2k} \quad (z \in \mathbb{C}) \tag{6}$$

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \quad (z \in \mathbb{C}, |z| < 1) \tag{7}$$

- Identitäten für Summen:

$$\sum_{k=0}^{n-1} z^k = \frac{1 - z^n}{1 - z} \quad (z \in \mathbb{C}, z \neq 1, n \in \mathbb{N}) \tag{8}$$

$$(z_1 + z_2)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z_1^k z_2^{n-k} \quad (z_1, z_2 \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}) \tag{9}$$

- Cauchy-Riemann Differenzialgleichungen: Es sei f auf einer offenen Mengee $D \subset \mathbb{C}$ gegeben und $z_0 = x_0 + iy_0 \in D$. Definiere $u(x,y) := Ref(x+iy)$ und $v(x,y) := Imf(x+iy)$. Ist f bei z_0 komplex differenzierbar so gilt bei (x_0, y_0)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{10}$$

  Sind die oben genannten Ableitungen auf D stetig und erfüllen die Differenzialgleichungen bei (x_0, y_0), so kann auch gefolgert werden, dass f bei z_0 komplex differenzierbar ist.