Jun.-Prof. Dr. D. Mugnolo
R. Pröpper
WS 2010/2011

Gesamt: 8

Übungen zu Partielle Differenzialgleichungen

Blatt: 1

Abgabetermin: Montag, 25.10.2010 in der Vorlesung

Sei $u : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ mit $x := (x_1, \dots, x_n) \mapsto u(x)$. Wir werden für die partiellen Ableitungen der Funktion u auch folgende Notation verwenden:

$$u_{x_i} := \frac{\partial u}{\partial x_i}, \qquad u_{x_i x_j} := \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \qquad \text{etc.}$$

1. Gegeben sei die folgende partielle Differenzialgleichung ("gedämpfte Diffusionsgleichung") [4]

   $$u_t = u_{xx} + u, \quad t \geq 0,\ x \in \mathbb{R}.$$

   Eine Lösung u der gedämpften Diffusionsgleichung heißt "*travelling wave*", falls eine Funktion $\phi : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ und eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ existieren, so dass $u(t,x) = \phi(x - ct)$ für alle $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie alle "*travelling wave*" Lösungen.

2. Gegeben sei die folgende partielle Differenzialgleichung ("Laplace-Gleichung") [4]

   $$\Delta u = 0, \quad \text{wobei } u : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R} \text{ und } \Delta u(x) := \sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i}(x).$$

   Zeigen Sie, dass die Laplace-Gleichung rotationsinvariant ist, d.h ist A eine orthogonale $n \times n$-Matrix ($AA^T = I$) und u eine Lösung der Gleichung, so ist auch die Funktion $v : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ mit $v(x) := u(Ax)$ eine Lösung.