Partielle Differenzialgleichungen WS 2010/11
Musterlösung zu Blatt 12

---

1. a) Seien $a, b \in A$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Sei P_A linear. Dann ist $\lambda a + \mu b = \lambda P_A a + \mu P_A b = P_A(\lambda a + \mu b) \in A$. Sei A ein Unterraum, $\lambda c = b \in A$ beliebig, $\lambda \in \mathbb{K}$, und $x, y \in H$. Dann ist

$$Re\langle \lambda x - \lambda P_A x, b - \lambda P_A x\rangle = |\lambda|^2 Re\langle x - P_A x, c - P_A x\rangle \leq 0,$$

also $P_A(\lambda x) = \lambda P_A x$; und

$$Re\langle x+y-P_A x-P_A y, b-P_A x-P_A y\rangle = Re\langle x-P_A x, (b-P_A y)-P_A x\rangle + Re\langle y-P_y, (b-P_A x)-P_y\rangle \leq 0,$$

also $P_A(x+y) = P_A x + P_A y$.

b) $$\begin{aligned}\|P_A x - P_A y\|^2 &= Re\langle P_A x - P_A y, x-y\rangle + Re\langle P_A x - P_A y, P_A x - x\rangle + Re\langle P_A x - P_A y, y - P_A y\rangle \\ &\leq Re\langle P_A x - P_A y, x - y\rangle \leq \|P_A x - P_A y\|\|x-y\|\end{aligned}$$

2. Sein $g_1, g_2 \in L^2(I)$ und $\int_I g_1(x)h(x)\,dx = \int_I f(x)h'(x)\,dx = \int_I g_2(x)h(x)\,dx$, also $\int_I (g_1 - g_2)(x)h(x)\,dx = 0$ für alle $h \in C_c^1(I)$. Sei $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $C_c^1(I)$, die gegen $g_1 - g_2$ konvergiert. Dann gilt $0 = \lim_{n\to\infty} \langle g_1 - g_2, h_n\rangle_{L^2} = \langle g_1 - g_2, g_1 - g_2\rangle_{L^2}$, also $g_1 = g_2$.

3. Betrachte die Folge $(f_n)_{n\geq 2}$ in $C^0(0,1)$ mit

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 < x \leq 1/2 - 1/n, \\ n/2(x - 1/2 + 1/n) & \text{für } 1/2 - 1/n \leq x \leq 1/2 + 1/n, \\ 1 & \text{für } 1/2 + 1/n \leq x < 1. \end{cases}$$

(f_n) konvergiert in $L^2(0,1)$ gegen die Funktion $f \notin C^0(0,1)$ mit $f(x) = 0$ für $0 < x \leq 1/2$ und $f(x) = 1$ für $1/2 < x < 1$.
Betrachte die Folge $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $C^1(0,1)$ mit $g_n(x) = |x - 1/2|^{1+1/n}$. (g_n) konvergiert bezüglich der H^1-Norm gegen $g \notin C^1(0,1)$ mit $g(x) = |x - 1/2|$.

4. a) Sei $\psi \in C_c^1(I)$ fest mit $\int_a^b \psi(x)\,dx = 1$. Sei $w \in C_c^1(I)$ beliebig. Definiere $v(x) = \int_a^x w(z) - \psi(z)\left(\int_a^b w(y)\,dy\right) dz$. Dann ist wegen $\int_a^b \psi(x)\,dx = 1$ auch $v(x) \in C_c^1(I)$; und $v'(x) = w(x) - \psi(x)\int_a^b w(y)\,dy$. Man erhält mit dem Satz von Fubini

$$\begin{aligned} 0 = \int_a^b f(x)v'(x)\,dx &= \int_a^b f(y)w(y)\,dy - \int_a^b f(x)\psi(x)\left(\int_a^b w(y)\,dy\right)dx \\ &= \int_a^b \left(f(y) - \int_a^b f(x)\psi(x)\,dx\right) w(y)\,dy. \end{aligned}$$

Da $w \in C_c^1(I)$ beliebig war, folgt $f(y) = \int_a^b f(x)\psi(x)\,dx$ konstant fast überall.

b) Aus $g \in L^2(I)$ folgt $G \in C(\bar{I})$. Definiere die Indikatorfunktion $\chi(x,t) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \geq t, \\ 0 & \text{für } x < t \end{cases}$ Dann gilt mit dem Satz von Fubini

$$\begin{aligned} \int_a^b G(x)h'(x)\,dx &= \int_a^b \left(\int_a^x g(t)\,dt\right) h'(x)\,dx = \int_a^b \int_a^b (x,t)g(t)h'(x)\,dt\,dx \\ &= \int_a^b g(t)\left(\int_t^b h'(x)\,dx\right)dt = -\int_a^b g(t)h(t)\,dt. \end{aligned}$$

c) Sei $f \in H^1$. Definiere $F := \int_a^x f'(x)\,dx \in C(\bar{I})$. Dann ist $\int_a^b f(x)h'(x)\,dx = -\int_a^b f'(x)h(x)\,dx = \int F(x)h'(x)\,dx$, also $\int_a^b (F-f)(x)h'(x)\,dx = 0$ für alle $h \in C_c^1(I)$. Mit a) folgt dann $f - F = c$ f.ü., $c \in \mathbb{R}$, also $f = F + c \in C(\bar{I})$ fast überall.
Sei nun $f \in C([0,1]) \cap H^1(0,1)$. Es ist $\|f\|_{C([0,1])} = \max_{x\in[0,1]} |f(x)| =: M$. Betrachte auf $H^1(0,1)$ die äquivalente Norm $\|f\| := \sqrt{\int_0^1 f^2(x)\,dx} + \sqrt{\int_0^1 (f'(x))^2\,dx} \leq \sqrt{2}\|f\|_{H^1}$. Sei $y \in [0,1]$ mit $|f(y)| = M$ und o.B.d.A. $f(y) = M$. Sei $m := \max\{\min_{x\in[0,1]} f(x), 0\}$ und $z \in [0,1]$ mit $f(z) = m$. Dann folgt mit der Hölder-Ungleichung

$$\begin{aligned}\|f\| &= \sqrt{\int_0^1 f^2(x)\,dx}\sqrt{\int_0^1 1^2\,dx} + \sqrt{\int_0^1 (f'(x))^2\,dx}\sqrt{\int_0^1 1^2\,dx} \geq \int_0^1 |f'(x)|\,dx + \int_0^2 |f(x)|\,dx \\ &\geq |\int_z^y f'(x)\,dx| + m = M - m + m = M.\end{aligned}$$

Also $\|f\|_{C([0,1])} \leq \|f\| \leq \sqrt{2}\|f\|_{H^1}$.