Jun.-Prof. Dr. D. Mugnolo
R. Pröpper
WS 2010/2011

Gesamt: 16

Übungen zu Partielle Differenzialgleichungen

Blatt: 13

Abgabetermin: Montag, 31.1.2011 in der Vorlesung

1. Seien H_1, H_2 Hilberträume und $T : H_1 \mapsto H_2$ ein linearer Operator. [4]

   (a) Zeige, dass T genau dann beschränkt ist, wenn T Lipschitz-stetig ist, und T genau dann Lipschitz-stetig ist, wenn T stetig ist.

   Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ und betrachte den Hilbertraum $H = L^2(\Omega)$.

   (b) Finde die orthogonale Projektion in H auf den Unterraum der konstanten Funktionen.

2. Sei $\eta \in C^1(0,\infty)$. Sei $u \in H^1(0,1)$ und es existiere ein $\epsilon > 0$, so dass $\eta(x) = 0$ für $x \geq 1-\epsilon$. Bezeichne mit $\tilde{u}$ die Erweiterung von u auf $(0,\infty)$ durch $\tilde{u}(x) = 0$ für $x \geq 1$. Zeige $\eta\tilde{u} \in H^1(0,\infty)$, und beweise die Produktregel $(\eta\tilde{u})' = \eta'\tilde{u} + \eta\tilde{u}'$. [4]

3. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ und $u \in H^1(\Omega)$. Zeige $u^+ := \dfrac{|u|+u}{2} \in H^1(\Omega)$. [4]

   Hinweis: Die schwache Ableitung $\dfrac{\partial u^+}{\partial x_j}$ ist gegeben durch $\chi_{\{u>0\}}\dfrac{\partial u}{\partial x_j}$. Definiere $f \in C^1(\mathbb{R})$ durch $f_n(r) := \begin{cases} (r^2+n^{-2})^{1/2} - n^{-1} & \text{für } r > 0, \\ 0 & \text{für } r \leq 0 \end{cases}$ und betrachte $-\displaystyle\int_\Omega (f_n \circ u(x)) \frac{\partial \phi}{\partial x_j}(x)\,dx$ mit $\phi \in C_c^1(\Omega)$.

4. Sei Ω eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^d$. Definiere $C_0^2(\Omega)_+ := \{f \in C_c^2(\Omega) : f(x) \geq 0 \ \forall x \in \Omega\}$ und $H_0^1(\Omega)_+ := \{f \in H_0^1 : f(x) \geq 0 \text{ f.ü.}\}$. Eine Funktion $f \in L^2(\Omega)$ heißt subharmonisch, falls $-\displaystyle\int_\Omega f(x)\Delta\phi(x) \leq 0$ für alle $\phi \in C_0^2(\Omega)_+$. [4]

   Zeige: Ist $u \in H^1(\Omega)$ subharmonisch und $(u-c)^+ \in H_0^1(\Omega)$, $c \in \mathbb{R}$, so gilt $u(x) \leq c$ für fast alle $x \in \Omega$.

   Hinweis: Benutze, dass $C_c^2(\Omega)_+$ dicht in $H_0^1(\Omega)_+$ liegt und dass aus $\nabla f = 0$ f.ü. folgt $f = 0$ f.ü., falls $f \in H_0^1(\Omega)$.